

IFT436 - Rappel des notions de mathématiques discrètes

Bases de logique

- ▶ $\wedge$: et logique. $A \wedge B$ est vrai si A et B sont vrais.

Bases de logique

- ▶ $\wedge$: et logique. $A \wedge B$ est vrai si A et B sont vrais.
- ▶ $\vee$: ou logique. $A \vee B$ est vrai si **au moins** un de A ou B est vrai.

Bases de logique

- ▶ $\wedge$: et logique. $A \wedge B$ est vrai si A et B sont vrais.
- ▶ $\vee$: ou logique. $A \vee B$ est vrai si **au moins** un de A ou B est vrai.
- ▶ $\neg$: négation. $\neg A$ est vrai si A est faux.

Bases de logique

- ▶ $\wedge$: et logique. $A \wedge B$ est vrai si A et B sont vrais.
- ▶ $\vee$: ou logique. $A \vee B$ est vrai si **au moins** un de A ou B est vrai.
- ▶ $\neg$: négation. $\neg A$ est vrai si A est faux.
- ▶ $\Rightarrow$: implication. $A \Rightarrow B$ veut dire que si A est vrai, alors B est vrai.
 $A \Rightarrow B$ est faux **seulement quand** A est vrai mais B est faux.

Bases de logique

- ▶ $\wedge$: et logique. $A \wedge B$ est vrai si A et B sont vrais.
- ▶ $\vee$: ou logique. $A \vee B$ est vrai si **au moins** un de A ou B est vrai.
- ▶ $\neg$: négation. $\neg A$ est vrai si A est faux.
- ▶ $\Rightarrow$: implication. $A \Rightarrow B$ veut dire que si A est vrai, alors B est vrai.
 $A \Rightarrow B$ est faux **seulement quand** A est vrai mais B est faux.
- ▶ $\Leftrightarrow$: si et seulement si. $A \Leftrightarrow B$ est vrai seulement si $A = B$ est toujours vrai.

Bases de logique

- ▶ $\forall$: pour tous les. $\forall x \cdot A$ est vrai si A est vrai pour toute valeur de x de l'univers.
 $\forall x \in X \cdot A$ est vrai si A est vrai pour tout $x \in X$.

Bases de logique

- ▶ $\forall$: pour tous les. $\forall x \cdot A$ est vrai si A est vrai pour toute valeur de x de l'univers.
 $\forall x \in X \cdot A$ est vrai si A est vrai pour tout $x \in X$.
- ▶ $\exists$: il existe. $\exists x \cdot A$ est vrai s'il y a au moins une valeur de x qui rend A vrai.

Bases de logique

- ▶ $\forall$: pour tous les. $\forall x \cdot A$ est vrai si A est vrai pour toute valeur de x de l'univers.
 $\forall x \in X \cdot A$ est vrai si A est vrai pour tout $x \in X$.
- ▶ $\exists$: il existe. $\exists x \cdot A$ est vrai s'il y a au moins une valeur de x qui rend A vrai.
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N} \cdot (n \text{ est pair})$ (faux)
 $\forall n \in \mathbb{N} \cdot (2n \text{ est pair})$ (vrai)
 $\exists n \in \mathbb{N} \cdot (n \text{ est pair})$ (vrai)

Ensembles

Collection non-ordonnée d'objets, sans répétition.

- ▶ Définition par extension (lister les éléments) :
 $S = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$

Ensembles

Collection non-ordonnée d'objets, sans répétition.

- ▶ Définition par extension (lister les éléments) :

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

- ▶ Définition par compréhension :

$$S = \{x : \mathcal{A}\}$$

où $\mathcal{A}$ est une formule. Inclura tous les éléments x de l'univers qui satisfont $\mathcal{A}$.

Ensembles

Collection non-ordonnée d'objets, sans répétition.

- ▶ Définition par extension (lister les éléments) :

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

- ▶ Définition par compréhension :

$$S = \{x : \mathcal{A}\}$$

où $\mathcal{A}$ est une formule. Inclura tous les éléments x de l'univers qui satisfont $\mathcal{A}$.

- ▶ On utilise parfois le raccourcis

$$S = \{x \in T : \mathcal{A}\}$$

pour indiquer qu'on considère seulement les éléments de T .

Ceci remplace $S = \{x : x \in T \wedge \mathcal{A}\}$

Ensembles

Collection non-ordonnée d'objets, sans répétition.

- ▶ Définition par extension (lister les éléments) :

$$S = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

- ▶ Définition par compréhension :

$$S = \{x : \mathcal{A}\}$$

où $\mathcal{A}$ est une formule. Inclura tous les éléments x de l'univers qui satisfont $\mathcal{A}$.

- ▶ On utilise parfois le raccourcis

$$S = \{x \in T : \mathcal{A}\}$$

pour indiquer qu'on considère seulement les éléments de T .

Ceci remplace $S = \{x : x \in T \wedge \mathcal{A}\}$

- ▶ Exemples :

$$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ est pair}\} \quad \{x \in \mathbb{R} : 10 \leq x < 100\}$$

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{N} \text{ et } x \text{ divise } y\}$$

$$\{X : X \subseteq \mathbb{N} \wedge \exists x \in X \cdot (x \text{ est premier})\}$$

Ensembles

Soit S et T deux ensembles. On utilise les notations :

$\in$: $x \in S$: vrai si x est un élément de l'ensemble S .

Ensembles

Soit S et T deux ensembles. On utilise les notations :

$\in$: $x \in S$: vrai si x est un élément de l'ensemble S .

$\notin$: $x \notin S$: vrai si x n'est pas un élément de S .

Ensembles

Soit S et T deux ensembles. On utilise les notations :

$\in$: $x \in S$: vrai si x est un élément de l'ensemble S .

$\notin$: $x \notin S$: vrai si x n'est pas un élément de S .

$|S|$: cardinalité de S , qui est le nombre d'éléments de S . Certains dénotent $\text{card}(S)$ ou $\#(S)$.

Ensembles

Soit S et T deux ensembles. On utilise les notations :

$\in$: $x \in S$: vrai si x est un élément de l'ensemble S .

$\notin$: $x \notin S$: vrai si x n'est pas un élément de S .

$|S|$: cardinalité de S , qui est le nombre d'éléments de S . Certains dénotent $\text{card}(S)$ ou $\#(S)$.

$\emptyset$: ensemble vide. $|\emptyset| = 0$.

Ensembles

Soit S et T deux ensembles. On utilise les notations :

$\in$: $x \in S$: vrai si x est un élément de l'ensemble S .

$\notin$: $x \notin S$: vrai si x n'est pas un élément de S .

$|S|$: cardinalité de S , qui est le nombre d'éléments de S . Certains dénotent $card(S)$ ou $\#(S)$.

$\emptyset$: ensemble vide. $|\emptyset| = 0$.

$\subseteq$: $S \subseteq T$ si tout élément de S est dans T . Donc,
 $\forall x \cdot (x \in S \Rightarrow x \in T)$.

Ensembles

Soit S et T deux ensembles. On utilise les notations :

$\in$: $x \in S$: vrai si x est un élément de l'ensemble S .

$\notin$: $x \notin S$: vrai si x n'est pas un élément de S .

$|S|$: cardinalité de S , qui est le nombre d'éléments de S . Certains dénotent $\text{card}(S)$ ou $\#(S)$.

$\emptyset$: ensemble vide. $|\emptyset| = 0$.

$\subseteq$: $S \subseteq T$ si tout élément de S est dans T . Donc,
 $\forall x \cdot (x \in S \Rightarrow x \in T)$.

$\mathbb{P}$: $\mathbb{P}(S) = \{T : T \subseteq S\}$.

Ensemble des sous-ensembles de S .

$|\mathbb{P}(S)| = 2^{|S|}$ (si S est fini)

Ensembles

Quelques ensembles bien connues :

- ▶ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- ▶ $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- ▶ $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.
- ▶ $\mathbb{R}$ = les réels

Opérateurs d'ensembles

$\cup$: union des éléments de S et T

$$S \cup T = \{x : x \in S \vee x \in T\}$$

$\cap$: intersection de S et T

$$S \cap T = \{x : x \in S \wedge x \in T\}$$

$\setminus$: différence, éléments dans S mais pas dans T

$$S \setminus T = \{x : x \in S \wedge x \notin T\}$$

Note :

$$S \cup T = T \cup S$$

$$S \cap T = T \cap S$$

$$S \setminus T \neq T \setminus S \text{ (exercice : décrire quand l'égalité est possible)}$$

Séquences et permutations

- ▶ Séquence : liste ordonnée d'objets. Répétitions possibles.
(1, 2, 4, 8, 16, 1, 2, 3, 4)
(10, "allo", 20)
($\{2, 4, 6\}$, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$)

Séquences et permutations

- ▶ Séquence : liste ordonnée d'objets. Répétitions possibles.
(1, 2, 4, 8, 16, 1, 2, 3, 4)
(10, "allo", 20)
($\{2, 4, 6\}$, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$)
- ▶ Parfois on utilise les crochets []
[1, 2, 4, 8, 16, 1, 2, 3, 4]

Séquences et permutations

- ▶ Séquence : liste ordonnée d'objets. Répétitions possibles.
(1, 2, 4, 8, 16, 1, 2, 3, 4)
(10, "allo", 20)
($\{2, 4, 6\}$, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$)
- ▶ Parfois on utilise les crochets []
[1, 2, 4, 8, 16, 1, 2, 3, 4]
- ▶ Permutation d'un ensemble S : séquence qui contient chaque élément de S une fois.
 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
Permutation : (2, 5, 4, 3, 1)

Combinatoire

- ▶ Si $|S| = n$, il y a $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ permutations de S .
Car il y a n choix pour le premier élément, puis $n - 1$ choix restants pour le 2eme, puis $n - 2$ choix restants pour le 3eme, etc.

Combinatoire

- ▶ Si $|S| = n$, il y a $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ permutations de S .
Car il y a n choix pour le premier élément, puis $n - 1$ choix restants pour le 2eme, puis $n - 2$ choix restants pour le 3eme, etc.
- ▶ Il y a 2^n sous-ensembles de S .
 $\mathbb{P}(S) = 2^{|S|}$.
Soit $S = \{s_1, \dots, s_n\}$. Pour construire $X \subseteq S$, on a 2 choix pour s_1 : on le met dans X ou pas ; puis on a 2 choix pour s_2 ; puis 2 choix pour s_3 , etc. Il y a donc $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$ combinaisons de choix pour construire X .

Combinatoire

Combien de sous-ensembles de taille k de S y a-t-il ?

Que vaut $|\{X : X \subseteq S \wedge |X| = k\}|$?

Definition

On définit $\binom{n}{k}$ comme le nombre de sous-ensembles de taille k d'un ensemble de taille n .

Combinatoire

- ▶ $\binom{n}{0} = 1$. Une seule façon de choisir 0 éléments : $\emptyset$.

Combinatoire

- ▶ $\binom{n}{0} = 1$. Une seule façon de choisir 0 éléments : $\emptyset$.
- ▶ $\binom{n}{1} = n$.

Combinatoire

- ▶ $\binom{n}{0} = 1$. Une seule façon de choisir 0 éléments : $\emptyset$.
- ▶ $\binom{n}{1} = n$.
- ▶ $\binom{n}{n} = 1$.

Combinatoire

- ▶ $\binom{n}{0} = 1$. Une seule façon de choisir 0 éléments : $\emptyset$.
- ▶ $\binom{n}{1} = n$.
- ▶ $\binom{n}{n} = 1$.
- ▶ $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$. Aucune façon de choisir ces quantités d'éléments.

Combinatoire

- ▶ $\binom{n}{0} = 1$. Une seule façon de choisir 0 éléments : $\emptyset$.
- ▶ $\binom{n}{1} = n$.
- ▶ $\binom{n}{n} = 1$.
- ▶ $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$. Aucune façon de choisir ces quantités d'éléments.
- ▶ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Peut se déduire via $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$. Au numérateur, le nombre de séquences de k éléments. Au dénominateur, on divise par le nombre de permutations (car chaque sous-ensemble de taille k a été compté k fois).

Logarithmes et exposants

Definition

$\log_b(n)$ est l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir n . On écrit parfois $\log_b n$.

En IFT436, $\log n = \log_2 n$ (base 2 par défaut)

Logarithmes et exposants

Definition

$\log_b(n)$ est l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir n . On écrit parfois $\log_b n$.

En IFT436, $\log n = \log_2 n$ (base 2 par défaut)

Exemples

$$\ln n = \log_e n$$

$$\log 8 = 3$$

$$\log_{10}(10000) = 4$$

$$\log 2 = 1$$

$$\log_b 1 = 0 \quad (\text{car } b^0 = 1)$$

$\log_b 0$ est non-défini

Logarithmes et exposants

► $n^a \cdot n^b = n^{a+b}$

Logarithmes et exposants

- ▶ $n^a \cdot n^b = n^{a+b}$
- ▶ $(n^a)^b = n^{a \cdot b}$
(pas la même chose que n^{a^b})

Logarithmes et exposants

- ▶ $n^a \cdot n^b = n^{a+b}$
- ▶ $(n^a)^b = n^{a \cdot b}$
(pas la même chose que n^{a^b})
- ▶ $b^{\log_b n} = n$
(on donne à b l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir n)

Logarithmes et exposants

- ▶ $n^a \cdot n^b = n^{a+b}$
- ▶ $(n^a)^b = n^{a \cdot b}$
(pas la même chose que n^{a^b})
- ▶ $b^{\log_b n} = n$
(on donne à b l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir n)
- ▶ $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

Logarithmes et exposants

- ▶ $n^a \cdot n^b = n^{a+b}$
- ▶ $(n^a)^b = n^{a \cdot b}$
(pas la même chose que n^{a^b})
- ▶ $b^{\log_b n} = n$
(on donne à b l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir n)
- ▶ $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$
- ▶ $\log(a/b) = \log a - \log b$

Logarithmes et exposants

- ▶ $n^a \cdot n^b = n^{a+b}$
- ▶ $(n^a)^b = n^{a \cdot b}$
(pas la même chose que n^{a^b})
- ▶ $b^{\log_b n} = n$
(on donne à b l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir n)
- ▶ $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$
- ▶ $\log(a/b) = \log a - \log b$
- ▶ $\log(n^k) = k \cdot \log n$