

IFT436 - Série d'exercices #1 : un peu de mathématiques discrètes (SOLUTIONS)

Manuel Lafond

Exercices mathématiques

Exercice 1. Montrez par induction que pour tout entier $n \geq 2$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. L'identité $\binom{n}{2} = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1}$ peut être pratique, mais il faudrait la démontrer (avec un argument simple).

Solution. On va d'abord démontrer que $\binom{n}{2} = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1}$. Combien y a-t-il de façon de choisir deux éléments d'un ensemble X avec $|X| = n$? Considérons un certain $z \in X$ choisi arbitrairement, puis fixons-le. Pour former une paire d'éléments p de X , il y a deux cas possibles: soit $z \notin p$ ou bien $z \in p$. On obtiendra $\binom{n}{2}$ en comptant le nombre de paires ne contenant pas z , plus le nombre de paires contenant z .

Le nombre de paires ne contenant pas z est $\binom{n-1}{2}$ puisqu'on doit choisir 2 éléments parmi $X \setminus \{z\}$ (et $|X \setminus \{z\}| = n - 1$). Le nombre de paires qui contiennent z est $\binom{n-1}{1}$ puisque une fois que z est choisi dans notre paire, on doit choisir un seul élément dans $X \setminus \{z\}$ pour former notre paire. Il s'ensuit que $\binom{n}{2} = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1}$.

Montrons maintenant $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ par induction sur n . Pour le cas de base, on prend $n = 2$. On sait que $\binom{2}{2} = 1$ et $(2(2-1))/2 = 1$. Pour l'induction, on suppose que $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ pour tout $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$. Avec l'identité ci-haut, $\binom{n}{2} = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} = \binom{n-1}{2} + n - 1$. Par l'hypothèse d'induction, ceci est égal à $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 1$. Ceci est ensuite égal à $\frac{(n-1)(n-2)+2(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2+2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. $\square$

Exercice 2. Montrez que pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Piste de solution. On procède par induction sur n .

Cas de base. Lorsque $n = 1$, on a $\sum_{i=1}^1 i = 1$ et de l'autre côté, $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, ce qui démontre l'égalité.

Induction. On suppose par induction que $\sum_{i=1}^{n-1} i = (n-1)(n)/2$. En utilisant cette hypothèse, on a

$$\sum_{i=1}^n i = \sum_{i=1}^{n-1} i + n = (n-1)n/2 + n = (n-1)n/2 + 2n/2 = n(n+1)/2$$

Exercice 3. Montrez que $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Piste de solution. Ceci a été fait en classe. Procédez par induction en enlevant le dernier élément de la somme.

Exercice 4. Soit X un ensemble contenant n éléments. Combien existe-t-il de sous ensembles différents de X ?

Solution. Supposons que l'on ordonne les éléments de X arbitrairement en les nommant $x_1, x_2, \dots, x_n$. Lorsque l'on forme un sous-ensemble X' , il y a 2 possibilités pour x_1 : il est dans X' ou il ne l'est pas. Puis, il y a 2 possibilités pour x_2 , et ainsi de suite jusqu'à x_n . En multipliant les possibilités de combinaisons de choix, il y a donc $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$ (on multiplie n fois) façons de former un sous-ensemble, et il y en a donc 2^n .

Voici une façon alternative, plus longue, équivalente, mais aussi instructive. On montre qu'il y a 2^n sous-ensembles possibles. On associe chaque sous-ensemble $S \subseteq X$ à une séquence de n bits $b_1 b_2 \dots b_n$ en posant $b_i = 1$ si $x_i \in S$, et $b_i = 0$ si $x_i \notin S$. Chaque $S \subseteq X$ différent sera associé à une séquence de bits différente, et chaque séquence de n bits correspond à un sous-ensemble. Il y a donc autant de sous-ensembles que de séquences de n bits. Sachant qu'il y a 2^n séquences de n bits possible, on déduit qu'il y a 2^n sous-ensembles possibles. $\square$

Exercice 5. Montrez que $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$. On peut probablement le faire par induction, mais je recommande d'utiliser des arguments logiques dans une preuve directe.

Solution. Soit X un ensemble de taille n . La somme $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ additionne le nombre de sous-ensembles de taille 0, puis le nombre de sous-ensembles de taille 1, de taille 2, et ainsi de suite jusqu'au nombre de sous-ensembles de taille n . À la fin, cette somme aura additionné le nombre total de sous-ensembles de X , ce qui est 2^n . $\square$

Exercice 6. Nous allons déterminer une forme close pour exprimer $\binom{n}{k}$. Commençons par nous échauffer avec l'exemple de la Loto.

1. À la Loto 6/49, une tirage résulte en un ensemble de 6 nombres différents choisis au hasard parmi 49. On pense souvent que le nombre de combinaisons possibles est $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ car il y a 49 choix pour le premier numéro, puis 48 pour le second, et ainsi de suite. Mais c'est en fait

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!}$$

Pourquoi?

2. Montrez que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. On peut faire une preuve directe en n'utilisant que des arguments en mot.

Solution.

1. On divise par $6!$ pour éliminer les permutations comptées en trop pour chaque sous-ensemble.
2. On peut généraliser l'argument en 1 pour montrer que $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$ (je vous laisse argumenter cette partie). Pour obtenir l'expression donnée, il suffit d'observer que $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Exercice 7. Dans cet exercice, nous allons expliquer pourquoi $\binom{n}{k}$ s'appelle le coefficient binomial.

1. Donnez la valeur de $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$.
2. Calculez l'expansion de $(x+1)^3$, c'est-à-dire, donnez une expression sous la forme $ax^3 + bx^2 + cx^1 + dx^0$. Quels sont les valeurs des coefficients a, b, c et d ? Il devrait y avoir un lien avec la question a).
3. Donnez une preuve directe de l'égalité

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$$

en généralisant vos observations ci-haut.

4. Pendant que vous y êtes, convainquez-vous que vous pourriez généraliser votre argument pour prouver que $(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$.

Solution.

1. Les valeurs sont 1, 3, 3, 1.
2. Les coefficients sont $a = 1, b = 3, c = 3, d = 1$.
3. Considérons le coefficient d'un terme x^i dans l'expansion de $(x + 1)^n$. En écrivant $(x + 1)^n = (x + 1)(x + 1)(x + 1) \dots (x + 1)$, on se rappelle que un terme x^i apparaît lorsque l'on multiplie x exactement i fois en calculant notre expansion. Donc chaque x^i est obtenu en choisissant x exactement i fois parmi les facteurs $(x + 1)$. Il y a $\binom{n}{i}$ façons de faire ce choix, et donc le coefficient de x^i dans l'expansion sera $\binom{n}{i}$. Puisque c'est vrai pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, l'expansion résulte en la somme présentée.
4. Je vous laisse les détails. L'idée est la même qu'en 3, mais quand on choisit i fois le x , on choisit $n - i$ fois le y .

Exercice 8. Montrez que pour deux ensembles X et Y , $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

Solution. Dans $|X| + |Y|$, on a compté exactement les éléments de $X \cup Y$, mais on a compté les éléments de $X \cap Y$ deux fois. En soustrayant par $|X \cap Y|$, on s'assure que chaque élément a été compté une seule fois.

Exercice 9. Dans cet exercice, nous allons compter des fonctions.

1. Une fonction de décision sur les n premiers entiers est une fonction $f : \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \{T, F\}$ qui associe chaque entier entre 0 et n à T ou à F (*true* ou *false*). Combien existe-t-il de fonctions de décision différentes sur les n premiers entiers?
2. On dénote par $\{0, 1\}^n$ l'ensemble de toutes les séquences de n bits. Une fonction booléenne $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ associe chaque séquence de n bits à 0 ou à 1. Combien existe-t-il de fonctions booléennes différentes sur n bits?
3. Une fonction $f : X \rightarrow Y$ de X vers Y est *bijective* si (1) pour tout $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$ et si (2) pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. En mots, chaque élément de X "pointe" un élément de Y différent, et chaque élément de Y est "pointé" par un élément.

Combien y a-t-il de fonctions bijectives par rapport à $|X|$?

Solution.

1. Pour une fonction f , il y a 2 choix possibles pour 0, 2 choix pour 1, etc. jusqu'à n . Il y a donc 2^{n+1} fonctions possibles.
2. 2^{2^n}
3. $|X|!$

Exercice 10. Montrez que si sept nombres distincts sont choisis parmi les nombres $1, 2, 3, \dots, 11$, alors la somme de deux de ces nombres est 12.

Solution. On pourrait imaginer une preuve directe, mais ici je vous propose une preuve par contradiction afin de pratiquer cette technique.

Supposons qu'on puisse choisir un ensemble X de 7 nombres sans avoir de paire qui somme à 12. Il y a 5 paires p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 de ces nombres qui somment à 12, et aucune de ces paires n'intersecte. En choisissant 7 nombres, il y a un ensemble Y de 4 nombres qui ne sont pas choisis. Puisque par supposition, aucun des p_i n'est contenu entièrement dans X , chacun des p_i a une intersection non-vide avec Y . Donc Y a un élément de chaque p_i . Puisque les p_i n'ont pas d'intersection, ceci veut dire que Y a au moins 5 éléments. Ceci est une contradiction, puisque $|Y| = 4$. On déduit donc que l'énoncé était vrai.

Exercice 11. Supposez que $n \in \mathbb{N}$ n'est pas un nombre premier. Montrez par contradiction que n a un diviseur d tel que $d \leq \sqrt{n}$.

A été fait en classe. Prouvez-le par contradiction.

Exercice 12. Montrez que dans une fête avec 6 personnes, il y a un groupe de 3 personnes qui sont amies mutuellement, ou bien un groupe de 3 personnes qui ne sont pas amies mutuellement.

Solution. Prenons n'importe quelle personne, disons Alice. On sait que Alice a soit au moins 3 amis dans le groupe, ou bien au moins 3 non-amis dans le groupe (puisque'il y a 5 personnes autres que Alice). Supposons d'abord que Alice a 3 amis x, y et z . Si deux de ces personnes sont amies, disons x et y , alors $\{Alice, x, y\}$ forment un groupe de 3 personnes mutuellement amies. Dans ce cas, la preuve est terminée car on a trouvé le groupe recherché. On va donc supposer qu'il n'y a pas deux personnes qui sont amies parmi x, y et z . Ceci veut dire que x, y et z forment un groupe de 3 personnes mutuellement non-amies. On a donc encore une fois trouvé le groupe recherché.

Si on suppose plutôt que Alice a 3 non-amis, la preuve est identique¹.

¹Ceci est un argument correct ici puisque c'est évident. Mais attention de ne pas prendre de raccourcis comme ça lorsque ce n'est pas approprié. Dans le doute, détaillez.

Exercices algorithmiques

Exercice 13. Montrez que le tri par insertion trie correctement.

Je garde ceci pour plus tard - je le ferai en classe lorsque nous approfondirons le tri.

Exercice 14. Donnez une preuve par contre-exemple de l'énoncé suivant: le tri Sous-gradué présenté en classe ne résout pas le problème du tri correctement.

Piste de solution. Discuté en classe. Il suffit de trouver une mauvaise entrée à donner à l'algo, par exemple (3,1,2,4).

Exercice 15. On peut exprimer le temps requis par le tri fusion par une fonction de récurrence. Lorsque la fonction $triFusion(T)$ est appelée avec un tableau de n éléments, calculer le temps requis demande de sommer le temps requis par les deux appels récursifs sur les moitiés de T , plus un temps $O(n)$ pour faire la fusion. Ce temps $t(n)$ peut s'approximer avec la fonction suivante:

$$t(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \\ 2t(n/2) + n & \text{si } n = 2^k, k > 1 \end{cases}$$

Montrez que $t(n) = n \log n$ pour tout $n = 2^k$, avec $k \geq 1$.

Solution. Je vous propose une preuve très similaire, mais légèrement différente de ce que j'ai fait en classe. Le principe est le même.

On procède par induction sur k , où $n = 2^k$.

Case de base: $k = 1$. Lorsque $n = 2^1 = 2$, on a $t(n) = 2$. D'un autre côté, $n \log n = 2^1 \log 2^1 = 2$.

Induction: on suppose que $t(m) = m \log m$ pour tout $m = 2^j$, où $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. On veut montrer que $t(n) = n \log n$ lorsque $n = 2^k$. Par définition,

$$t(n) = 2t(n/2) + n = 2t(2^{k-1}/2) + n = 2t(2^{k-1}) + n$$

Par induction, on sait que $t(2^{k-1}) = 2^{k-1} \log(2^{k-1})$, ce qui est égal à $n/2 \log(n/2) = n/2(\log n - \log 2) = n/2(\log n - 1)$. Donc,

$$t(n) = 2(n/2(\log n - 1)) + n = n(\log n - 1) + n = n \log n$$

Ceci conclut la preuve.

Exercice 16. Considérons le problème de recherche suivant.

Entrée : Une séquence triée de nombres $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et une valeur v .

Sortie : Un indice i tel que $v = a_i$ ou la valeur nil si v n'apparaît pas dans A .

Voici une solution itérative à ce problème: une recherche dichotomique.

fonction *RechercheItérative*($A, v, low, high$)

while $low \leq high$ **do**

$mid := \lfloor (low + high)/2 \rfloor$;

if $v == A_{mid}$ **then**

 return mid ;

else if $v > A_{mid}$ **then**

$low := mid + 1$;

else

$high := mid - 1$;

end

 return nil;

1. Donnez une version récursive de la recherche dichotomique.
2. Trouvez une équation de récurrence qui exprime le temps de calcul de votre algorithme (pour des fins de simplification, supposez que le traitement non récursif a un coût de 1 et que $n = 2^k$).
3. Devinez une solution à votre équation de récurrence.
4. Utilisez l'induction pour montrer que votre solution à l'équation de récurrence est juste.

Solution.

1. Je vous le laisse. Au lieu d'avoir une boucle, il suffit de rappeler la fonction avec low et $high$ une fois calculés. N'oubliez pas les cas d'arrêt!

2. Si $t(n)$ est le temps requis par l'algo, votre version récursive devrait être

$$t(n) = t(n/2) + 1$$

avec $t(2) = 1$.

3. C'est $t(n) = \log n$.

4. On montre que $t(n) = \log n$ pour les puissances de 2, i.e. $n = 2^k$ pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On procède par induction sur k .

Case de base: $k = 1$. Dans ce cas, $n = 2^1$ et $t(n) = 1$. Par ailleurs, $\log 2 = 1$.

Induction: on suppose que $t(n/2) = \log(n/2)$ et on veut prouver $t(n) = \log n$.

Puisque $t(n) = t(n/2) + 1$, on a par induction que $t(n) = \log(n/2) + 1 = \log n - \log 2 + 1 = \log n - 1 + 1 = \log n$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 17. Considérez le problème de la *Somme Cible*:

Entrée: un tableau $T = [t_1, \dots, t_n]$ d'entiers et un entier s .

Sortie: est-ce qu'il existe deux éléments distincts t_i, t_j de T tels que $t_i + t_j = s$?

Donnez le pseudo-code d'un algorithme en temps $O(n \log n)$ pour le problème de la Somme Cible.

Piste de solution. Je ne vous laisse qu'un indice. Triez d'abord le tableau en temps $O(n \log n)$. Puis, gardez deux pointeurs sur le tableau; un commence au début et l'autre au début. Si la somme des deux nombres pointés dépasse s , décrémente le pointeur droit. Si elle est en-dessous de s , incrémentez le pointeur gauche. Si c'est égal à s , vous avez trouvé.