

Séquence: liste ordonnée d'objets

ex: $(1, 1, 2, 3, 5, 4, 2)$

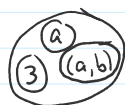
$(1, \text{"allo"}, (a, b))$

Souvent notation $[]$

$[1, 1, 2, 3, 5, 4, 2]$

Ensemble: collection non-ordonnée d'objets sans répétition

Notation $\{ \}$



$\{a, 3, (a, b)\}$

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$

$\{2, 2, 4, 6\} = \{2, 4, 6\}$

Quelques ensembles infinis

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\dots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

$\mathbb{R}$ = les réels

Soit X un ensemble.

$|X|$ = cardinalité de X (#elts)

ex: $|\{2, 4, 6, 8, 10\}| = 5$

$|\{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}| = 3$

$\emptyset$ = ensemble vide

$|\emptyset| = 0$

$|\{\emptyset\}| = 1$

• $\in$: est contenu dans

$2 \in \{2, 4, 6\}$



$$2 \in \{2, 4, 6\}$$

• $\subseteq$: sous-ensemble de

$X \subseteq Y$: tout elt de x est dans Y



• Notation constructive ensembliste

$\{x : \text{prédicat sur } x\}$

$\hookrightarrow$ affirmation vraie ou fausse

ou $\{x \mid \text{prédicat}\}$

ex: $\{x : x \in \mathbb{N} \text{ et } x \leq 8 \text{ et } x \text{ est pair}\}$

$$= \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$\{x : x \in \mathbb{N} \text{ et } x \% 2 = 0\}$$

$\hookrightarrow$ modulo

• $\cap \cup \setminus$

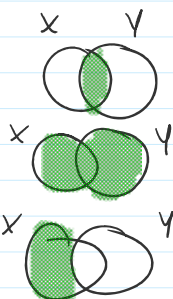
$X \cap Y$: intersection

$X \cup Y$: union

$X \setminus Y$: différence

$\hookrightarrow$ backslash

ou $X - Y$



Bases en logique

Prédicat: énoncé V ou F

ex: $\forall n \in \mathbb{Z}, n \text{ est pair}$ **F**

$\forall n \in \mathbb{Z}, 2n \text{ est pair}$ **V**

$\forall$ pour tous les
 $\exists$ il existe

$\exists n \in \mathbb{N}, n \text{ est pair}$ **V**

$\wedge$: et

$\vee$: ou

$\neg$: négation

$\Rightarrow$: implication

$p \Rightarrow q$: quand p est vrai,
alors q est vrai

Table de vérité

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$\Leftrightarrow$: si, et seulement si
équivalence

$p \Leftrightarrow q$ veut dire que $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$

Contraposition

$p \Rightarrow q$ est équivalent à $\neg q \Rightarrow \neg p$

Combinatoire

Permutation : soit $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ un ensemble.

Une permutation de S est une
séquence contenant elt de S une
fois.

Élément

ex: $\{1, 2, 3\}$ $(1, 2, 3)$ $(1, 3, 2)$
 $(2, 1, 3)$ $(2, 3, 1)$
 $(3, 1, 2)$ $(3, 2, 1)$

$\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$

Soit S un ensemble avec $|S| = n$.
Combien de permutations de S y a-t-il?

Réponse: $n! = n(n-1)(n-2) \dots (2)(1)$

Pourquoi: il y a n choix pour le 1^{er} elt
il y a $n-1$ choix pour le 2^{er} elt

...

il y a 1 choix pour le n^{eme} elt

il y a 1 choix pour le n^{eme} elt
 $\Rightarrow n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$ combinaisons possibles

$$n! \approx n^n$$

• Sous-ensembles

$$X \subseteq Y$$

Soit S un ens. avec $|S|=n$. Combien de sous-ens. de S y a-t-il?

$$|\{X : X \subseteq S\}| = 2^n$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$X \subseteq S \quad X = \{1, 3, 5\}$$

Soit $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, pour construire $X \subseteq S$

On a 2 choix pour s_1 : $s_1 \in X, s_1 \notin X$

" 2 " " s_2 : $s_2 \in X, s_2 \notin X$

...

2 " s_n : $s_n \in X, s_n \notin X$

$$\Rightarrow \# \text{ de combos de choix : } \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ fois}} = 2^n$$

Sous-ensembles de taille k

$$|\{X : X \subseteq S \text{ et } |X|=k\}|$$

$$S = \{1, 2, 3\} \quad k=2 \quad \# X \subseteq S \text{ avec } |X|=2$$

Rep: 3 = n

$$\rightarrow S = \{1, 2, 3, 4\} \quad k=2 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 23 \quad 24 \quad 34$$

Rép: $6 \neq n$

Quand $k=1$

$$|\{X: X \subseteq S \wedge |X|=1\}| = n$$

Quand $k=2$

$$|\{X: X \subseteq S \wedge |X|=2\}| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Pour construire un sous-ensemble $X \subseteq S$

avec 2 elts,

on a n choix pour le 1^{er} elt

on a $n-1$ choix pour le 2^e elt

$\Rightarrow$ le # de paires ordonnées de S
est donc $n(n-1)$

Puisque ce # compte chaque paire
non-ordonnée 2 fois, on doit
diviser par 2

$\Rightarrow$ # de paires non-ordonnées

$$\frac{n(n-1)}{2} \in \mathcal{O}(n^2)$$

$S = \{1, 2, 3, 4\}$

$$X = \{2, 4\}$$

$$X = \{4, 2\}$$

- Sous-ensembles de taille k (d'un ens. de taille n)

$$|\{X: X \subseteq S \wedge |X|=k\}| \quad \text{où } |S|=n$$

Rép: $\binom{n}{k}$ désigne le # de sous-ens. de taille k
d'un ens. de taille n

On appelle ça "k parmi n"

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

façons d'avoir une seq. ordonnée de k elt: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1)$

ex: $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$k=3$

$(1, 2, 3)$

$(1, 3, 2)$

$(2, 1, 3)$

$(2, 3, 1)$

$(3, 1, 2)$

$(3, 2, 1)$

Il faut diviser par $k!$ car chaque sous-ens. a été compté $k!$, une fois pour chaque permutation.

Log et exposants

$\log_b a$ = l'exposant qu'il faut donner à b pour obtenir a

$$b^{\log_b a} = a$$

Norme en IFT 436: $\log a = \log_2 a$

Par défaut: base 2

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

$$\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log(x^k) = k \log(x)$$

$$\log(x^k) = k \log(x)$$

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c} \neq a^{b^c}$$

$$\ln(x) = \log_e(x) = \frac{\log_2(x)}{\log_2 e}$$