

Induction et récursion

Pb de recherche

Entrée: tableau $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ d'entiers triés (ordre croissant) et un entier v

Sortie: true si A contient v , false sinon

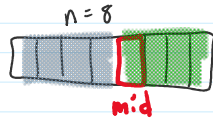
dicho(A, v)

si $|A| = 0$, return false

si $|A| = 1$, return ($A[1] == v$)

mid = $n/2 + 1$

$n = |A|$



si $A[mid] == v$, return true

si $A[mid] < v$, return dicho($A[mid..n], v$)

sinon return dicho($A[1..mid-1], v$)

Thm: dicho résout correctement le pb de la recherche.

Preuve: par induction sur $n = |A|$.

Cas de base: $n = 0$. Quand $n = 0$, v n'est clairement pas dans A et l'algo retourne correctement false.

$n = 1$. Quand $n = 1$, si $v \in A$, alors $A[1] = v$ et l'algo retourne true, et si $v \notin A$, $A[1] \neq v$ et on retourne false.

Induction: on suppose par induction que $\forall m < n$, l'algo est correct sur tableau de taille m , (applicable avec $n \geq 2$)

On veut: l'algo est correct sur $|A| = n$.

• Si $A[mid] = v$, alors $v \in A$ et on retourne true.

• Si $A[mid] < v$, alors si $v \in A$ alors v est à une position $> mid$ car A est trié.



Donc, si $v \in A$, l'appel récursif sur $A[mid..n]$ retournera true (par induction, car $|A[mid..n]| < n$)
Ensuite, l'algo retourne aussi true correctement.

Et si $v \notin A$, l'appel récursif sur $A[mid..n]$ retournera false (par induction).

Ensuite, l'algo retourne aussi false correctement.

• Si $A[mid] > v$, si $v \in A$, correct sur $A[1..mid-1]$
si $v \notin A$, correct sur $A[1..mid-1]$
(exercice)

$\checkmark$ $\checkmark$ $\checkmark$ $\checkmark$...
 $n=0$ $n=1$ $n=2$ $n=3$

Théorème: dichotomie fait $2 \log n + 1$ comparaisons (au pire)

Comparaison: $A[\text{mid}] = v \quad \forall n \geq 1$
 $A[\text{mid}] < v$

Soit $c(n)$ le nombre max. de comparaisons sur tableau de taille n .

$$n=1 \quad c(n) = c(1) = 1$$

$$n>1 \quad c(n) = 2 + c\left(\frac{n}{2}\right) \quad \text{en supposant que } n=2^k, k \in \mathbb{N}$$

car on fait au plus 2 compar. dans l'appel initial, plus $c(\frac{n}{2})$ compar. dans la récursion.

$$\text{Donc } c(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ c(\frac{n}{2}) + 2 & \text{si } n>1 \text{ et } n=2^k, k \in \mathbb{N} \quad (*) \end{cases}$$

$$\text{À prouver: } c(n) = 2 \log n + 1 \quad \forall n=2^k, k \in \mathbb{N}$$

Par induction: Cas de base: $n=2^0=1$

$$c(n) = 1 \quad \text{par définition } (*)$$

$$\begin{aligned} \text{De l'autre côté, } 2 \log n + 1 &= 2 \log(1) + 1 \\ &= 0 + 1 = 1. \quad \checkmark \end{aligned}$$

On suppose que
Induction: $c(m) = 2 \log m + 1 \quad \forall m < n, m=2^{k'}, k' \in \mathbb{N}$

$$\text{À prouver: } c(n) = 2 \log n + 1$$

$$\text{Ce qu'on a: } c(n) = c\left(\frac{n}{2}\right) + 2$$

$$= (2 \log\left(\frac{n}{2}\right) + 1) + 2 \quad \text{par hypothèse}$$

d'induction
(applicable car si
 $n=2^k$, alors $n/2$
est une puis. de 2)

$$= 2(\log n - \log 2) + 1 + 2$$

$$= 2 \log n - 2 \log 2 + 3$$

$$= 2 \log n - 2 \cdot 1 + 3$$

$$= 2 \log n + 1 \quad \square$$

comp. tri fusion

On avait établi que pour trifusion,

comp. Tri fusion

On aait établi que pour trifusion,

$$c(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=1 \\ 2c(\frac{n}{2}) + n & \text{si } n>1 \end{cases}$$

trifusion(T)

si $|T| \leq 1$
return T

A = trifusion(T[1.. $\frac{n}{2}$])

B = trifusion(T[$\frac{n}{2}+1$..n])

S = []

tant que $|A| \geq 1$ ou $|B| \geq 1$

si $|B|=0$ ou ($|A| \geq 1$ et $A[1] \leq B[1]$)

| S.append(A[1])

| A.erase(pos=1)

sinon

| S.append(B[1])

| B.erase(pos=1)

x

return S

À prouver: $c(n) = n \log n \quad \forall n = 2^k, k \in \mathbb{N}$

$$c(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n=1 \\ 2c(\frac{n}{2}) + n & \text{si } n>1 \end{cases}$$

Cas de base: $n=1$, $c(n)=0$ $n \log n = 1 \cdot \log 1 = 1 \cdot 0 = 0$.

Induction: hyp: $\forall m = 2^k, m < n, c(m) = m \log m$

$$\text{Ce qu'on a: } c(n) = 2c(\frac{n}{2}) + n$$

$$= 2\left(\left(\frac{n}{2}\right) \log\left(\frac{n}{2}\right)\right) + n \quad (\text{par hyp.})$$

$$= n \log\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$\begin{aligned}
&= n \log\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
&= n(\log n - \log 2) + n \\
&= n \log n - n \log 2 + n \\
&= n \log n - n + n \\
&= n \log n. \quad \square
\end{aligned}$$

Preuve par contradiction

On veut prouver p . On suppose $\neg p$ et on dérive un nm-sens, qq chose d'impossible. Donc, p doit être vrai.

Thm: $\forall a, b \in \mathbb{Z}, 3a + 6b \neq 2$

Preuve: supposons que le thm est faux.

Donc, $\neg(\forall a, b \in \mathbb{Z}, 3a + 6b \neq 2)$

$\exists a, b \in \mathbb{Z}, \neg(3a + 6b \neq 2)$

$\exists a, b \in \mathbb{Z}, 3a + 6b = 2$

Donc, en isolant a , on obtient

$$3a = 2 - 6b$$

$$a = \frac{2}{3} - \frac{6}{3}b$$

$$a = \frac{2}{3} - 2b$$

Puisque $b \in \mathbb{Z}$, $-2b \in \mathbb{Z}$,

et donc $-2b + \frac{2}{3}$ n'est pas un entier.

Or, $a = -2b + \frac{2}{3}$ et $a \in \mathbb{Z}$, une contradiction, Donc le thm est vrai. $\square$