

MAT115 - Devoir #3

À remettre le **vendredi 20 février avant 23h59**.
Tout retard entraînera jusqu'à 33% de pénalité par jour.

Pondération. Ce travail compte pour 5% des points de la session.

Modalités. Considérez les points suivants.

- Le travail peut être fait seul ou en équipe de deux.
- Le devoir doit être remis en format pdf via turnin, mais vous pouvez aussi joindre un fichier .mch. La provenance de votre pdf n'a pas d'importance — ce pdf peut provenir d'un export d'un fichier Word ou d'un fichier texte, d'un scan de vos écrits/dessins, etc.
Il n'y a pas de norme de présentation particulière. Écrivez lisiblement, et assurez-vous que vos noms et CIP apparaissent clairement sur le devoir remis.
- Sauf indication contraire, vous pouvez utiliser les résultats démontrés en classe et dans les solutionnaires d'exercices sans avoir à les démontrer (par exemple, par exemple, vous pouvez utiliser les tables des lois de la logique). Par contre, si vous utilisez de nouveaux résultats, vous devez les démontrer.

Question 1 : modélisation d'une carte avec ensembles et relations (10 × 6 points)

Dans cette question, nous allons modéliser le plan d'une ville à l'aide des ensembles, fonctions et relations. Un *lieu* est un endroit d'intérêt. Nous modélisons trois types de lieux: les commerces, les résidences et les intersections. Vous pouvez supposer que trois ensembles correspondants ont été définis et vous sont donnés: Commerce, Residence, Intersection.

L'ensemble Lieu de tous les lieux est donc

$$\text{Lieu} = \text{Commerce} \cup \text{Residence} \cup \text{Intersection}$$

On suppose qu chaque lieu fait partie d'un seul de ces trois ensembles (et pas deux ni trois). Ceci s'exprime par:

$$(\text{Commerce} \cap \text{Residence} = \emptyset) \wedge (\text{Commerce} \cap \text{Intersection} = \emptyset) \wedge (\text{Residence} \cap \text{Intersection} = \emptyset).$$

Une rue sert à lier deux lieux. Chaque rue a une direction. Pour deux lieux x et y , on représente le fait qu'une rue mène de x à y avec le couple (x, y) . Notez que ceci n'est pas équivalent à (y, x) . La relation Rue contient tous les couples (x, y) qui forment des rues. On suppose qu'il n'y a pas de rue qui va d'un lieu au même lieu (donc, (x, x) n'est jamais une rue).

Vous devez spécifier les ensembles et relations qui sont donnés ci-bas. Vous pouvez remettre vos réponses sur papier avec le formalisme vu en classe, ou vous pouvez remettre en langage ProB (un fichier .mch contenant un exemple est disponible).

- Edifice, qui contient les commerces et les résidences. Vous ne devez pas utiliser une définition par compréhension.
- Puit, qui contient les lieux x desquels on ne peut pas sortir, c'est-à-dire, qu'aucune rue ne permet d'aller de x vers un autre lieu.
- Source, qui contient les lieux x où on ne peut pas entrer, c'est-à-dire, qu'aucune rue ne permet d'aller d'un autre lieu vers x .
- Interne, qui contient les lieux qui ne sont pas des puits, ni des sources. N'utilisez pas une définition par compréhension.
- Adjacence, qui contient tous les ensembles de deux lieux $\{x, y\}$ tels qu'au moins un de (x, y) ou (y, x) est une rue. Pour la suite du devoir, si $\{x, y\} \in \text{Adjacence}$, on dira que x est adjacent à y et que y est adjacent à x .

Notez que vous pouvez définir un ensemble d'ensembles par $\{\{x, y\} \mid \dots\}$. Par contre, dans ProB, il faut une syntaxe du style $\{T \mid T \subseteq \text{Lieu} \wedge |T| = 2 \dots\}$.

- Isole, qui contient les résidences et les commerces qui n'ont aucune adjacence.
- SemiIsole, qui contient les résidences qui sont seulement adjacentes à des intersections.
- Chemin, qui contient l'ensemble des couples (x, y) tels qu'il existe un chemin de x à y . Notez qu'un chemin est une séquence de rues $(x, z_1), (z_1, z_2), \dots, (z_k, y)$ dont le départ est x et la fin est y . La longueur du chemin est arbitraire.

On dira que x est capable d'atteindre y s'il existe un chemin de x à y .

- SansClient, qui contient tous les commerces qu'aucune résidence n'est capable d'atteindre.
- Monopole, qui contient tous les commerces x tels que toute résidence capable d'atteindre x n'est pas capable d'atteindre un commerce autre que x .

Question 2 : gérez vos relations (16 + 3 × 8 points)

Répondez aux questions suivantes sur les relations.

- a. Cette question donne suite à la question 1. On définit la relation *CheminBidir*, qui inclut les paires de lieux x et y telles que l'on peut aller de x à y , et de y à x . On considère que tout lieu x devrait être en relation avec lui-même. Formellement, la définition est:

$$\text{CheminBidir} = \{(x, y) \mid x \in \text{Lieu} \wedge y \in \text{Lieu} \wedge (x = y \vee ((x, y) \in \text{Chemin} \wedge (y, x) \in \text{Chemin}))\}$$

Argumentez que *CheminBidir* est une relation d'équivalence.

- b. Soit S un ensemble quelconque et $R \subseteq S \times S$ une relation homogène sur S .
Vrai ou faux: si R est asymétrique, alors R est toujours antisymétrique. Justifiez votre réponse.
- c. Soit S un ensemble quelconque et $R \subseteq S \times S$ une relation homogène sur S .
Vrai ou faux: si R est antisymétrique, alors R est toujours asymétrique. Justifiez votre réponse.
- d. Soit $U = \{a, b, c, d\}$. Donnez un exemple de fonction totale f dont le domaine est U , telle que f n'est pas l'identité et telle que f est une relation transitive. Aucune justification requise.