

MAT115 - Devoir #1

À remettre le **mardi 27 janvier avant 23h59**.
Tout retard entraînera jusqu'à 33% de pénalité par jour.

Pondération. Ce travail compte pour 5% des points de la session.

Modalités. Considérez les points suivants.

- Le travail peut être fait seul ou en équipe de deux.
- Le devoir doit être remis en format pdf via turnin. La provenance de votre pdf n'a pas d'importance — ce pdf peut provenir d'un export d'un fichier Word ou d'un fichier texte, d'un scan de vos écrits/dessins, etc.

Il n'y a pas de norme de présentation particulière. Écrivez lisiblement, et assurez-vous que vos noms et CIP apparaissent clairement sur le devoir remis.

- Sauf indication contraire, vous pouvez utiliser les résultats démontrés en classe et dans les solutionnaires d'exercices sans avoir à les démontrer (par exemple, vous pouvez utiliser les tables des lois LP de logique). Par contre, si vous utilisez de nouveaux résultats, vous devez les démontrer.

Question 1 : preuves d'équivalence et d'implication (5 × 10 points)

Démontrez les énoncés suivants. Pour les questions a et b, vos tables doivent, au minimum, inclure les expressions qui apparaissent entre des parenthèses. Pour les questions c, d, e, vous devez justifier chaque étape, par exemple en référant aux entrées des tables des lois de la logique.

- a. Utilisez les tables de vérité pour montrer que $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r) \Leftrightarrow (p \vee \neg r) \wedge (q \vee r)$
- b. Utilisez les tables de vérité pour montrer que $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Solution.

Voici les tables pour a) et b):

| a) | p | q | r | p et q | p et r | q et non r | (p et q) ou (p et r) ou (q et non r) | p ou non r | q ou r | (p ou non r) et (q ou r) |
|----|---|---|---|--------|--------|------------|---|------------|--------|-----------------------------|
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| b) | p | q | r | p => q | q => r | (p => r) et (q => r) | p => r |
|----|---|---|---|--------|--------|-------------------------|--------|
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

□

- c. Sans utiliser les tables de vérité, montrez que $((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee r)$

Solution.

□

- d. Sans utiliser les tables de vérité, montrez que $p \vee q \wedge \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$

Solution.

J'accepte que vous vous débarrassiez des $q \wedge \neg q$ et $p \vee \neg p$ sans passer par *vrai* et *faux*.

$$\begin{aligned}
& p \vee q \wedge \neg(p \wedge q) \\
\Leftrightarrow & p \vee q \wedge (\neg p \vee \neg q) && (LP - 17) \\
\Leftrightarrow & p \vee (q \wedge \neg p \vee q \wedge \neg q) && (LP - 11) \\
\Leftrightarrow & p \vee (q \wedge \neg p \vee \text{faux}) && (LP - 19) \\
\Leftrightarrow & p \vee (q \wedge \neg p) && (LP - 4) \\
\Leftrightarrow & (p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) && (LP - 12) \\
\Leftrightarrow & (p \vee q) \wedge \text{vrai} && (LP - 20) \\
\Leftrightarrow & p \vee q && (LP - 3)
\end{aligned}$$

□

e. Sans utiliser les tables de vérité, montrez que

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \Rightarrow p \vee q \wedge \neg(p \wedge q)$$

Vous pouvez utiliser l'équivalence prouvée en d) sans preuve.

Solution.

Une version facile que j'accepte:

$$\begin{aligned}
& (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \\
\Leftrightarrow & p \oplus q && LP - 55 \\
\Rightarrow & p \vee q && \text{car } p \oplus q \Rightarrow p \vee q \\
\Leftrightarrow & p \vee q \wedge \neg(p \wedge q) && \text{numéro } d
\end{aligned}$$

Même si $p \oplus q \Rightarrow p \vee q$ ne fait pas partie des règles données en classe, j'estime qu'elle est assez évidente pour qu'on l'utilise.

Ou encore, si vous ne vouliez pas utiliser $p \oplus q \Rightarrow p \vee q$, on aurait pu faire:

$$\begin{aligned}
& (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \\
\Leftrightarrow & p \oplus q && LP - 55 \\
\Leftrightarrow & (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) && LP-54 \\
\Rightarrow & p \vee q && A \wedge B \Rightarrow A \\
\Leftrightarrow & p \vee q \wedge \neg(p \wedge q) && \text{numéro } d
\end{aligned}$$

Une version moins facile que j'accepte aussi. Notez que j'inclus des étapes inutiles, car il était suffisant de traiter $((p \wedge \neg q) \vee q)$ et de le transformer en $p \vee q$. Par contre, je crois que la démarche suivante est la plus naturelle. Le plus difficile était de trouver à quel endroit utiliser l'implication.

| | |
|---|----------------------------|
| $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ | |
| $\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q)$ | <i>LP</i> – 14 |
| $\Leftrightarrow ((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q)$ | <i>LP</i> – 14 |
| $\Leftrightarrow (\text{vrai} \wedge (\neg q \vee \neg p)) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q)$ | <i>LP</i> – 20 |
| $\Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q)$ | <i>LP</i> – 3 |
| $\Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \wedge ((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q))$ | <i>LP</i> – 14 |
| $\Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \wedge ((p \vee q) \wedge \text{vrai})$ | <i>LP</i> – 20 |
| $\Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee q)$ | <i>LP</i> – 3 |
| $\Rightarrow p \vee q$ | $A \wedge B \Rightarrow B$ |
| $\Leftrightarrow p \vee q \wedge \neg(p \wedge q)$ | numéro <i>d</i> |

□

Question 2 : traduction en formule du premier ordre ([7 × 7.2] points)

Traduisez les phrases suivantes en logique du premier ordre, à l’aide des prédicats Tarski-UdeS. Vous pouvez remettre vos réponses soit avec le symbolisme vu en classe, ou avec le symbolisme défini dans Tarski-UdeS.

- a. Il n’y a pas de triangle.

Solution.

Notez qu’il y a toujours plus d’une solution. Je vous présente les miennes, mais n’importe laquelle qui fonctionne est acceptable.

$\forall x \cdot (\neg \text{Triangle}(x))$ □

- b. Il y a un pentagone de taille medium.

Solution.

$\exists x \cdot \text{Pentagon}(x) \wedge \text{Medium}(x)$ □

- c. Il y a un objet qui est entre deux autres objets sur une rangée, colonne ou diagonale (voir le prédicat *Between*).

Solution.

$\exists x \cdot \exists y \cdot \exists z \cdot \text{Between}(x, y, z)$
 Aussi acceptable:
 $\exists x, y, z \cdot \text{Between}(x, y, z)$ □

- d. Il existe une colonne qui contient tous les triangles.

Solution.

$\forall x \cdot \forall y \cdot (\text{Triangle}(x) \wedge \text{Triangle}(y) \Rightarrow \text{SameCol}(x, y))$ □

e. Tout triangle est à gauche d'un pentagone.

Solution.

$$\forall x \cdot (\text{Triangle}(x) \Rightarrow \exists y \cdot (\text{Pentagon}(y) \wedge \text{LeftOf}(x, y)))$$

□

f. Il y a un objet qui n'a pas plus qu'un autre objet sur la même colonne.

Solution.

Il y a plusieurs façons:

$$\exists x \cdot (\forall y \cdot \forall z \cdot (\neg(y = z) \Rightarrow \neg(\text{SameCol}(x, y) \wedge \text{SameCol}(x, z))))$$

ou encore

$$\exists x \cdot ((\exists y \cdot ((x \neq y) \wedge \text{SameCol}(x, y))) \Rightarrow (\forall z \cdot ((x \neq z) \wedge (y \neq z) \Rightarrow \neg \text{SameCol}(x, z))))$$

□

g. Pour n'importe quelle paire d'objets distinct de la même taille, on peut trouver deux autres objets qui ont une taille différente.

Notez que pour vérifier que x et y sont distincts, il suffit d'écrire $x \neq y$, ou bien $x \neq y$ en Tarski-UdeS. Pour éviter les problèmes de priorité des opérateurs, je suggère de toujours mettre $(x \neq y)$ entre parenthèses.

Solution.

C'est un peu laborieux, mais faisable:

$$\forall x \cdot \forall y \cdot ((x \neq y) \wedge \text{SameSize}(x, y))$$

\Rightarrow

$$\exists w \cdot \exists z \cdot ((x \neq w) \wedge (x \neq z) \wedge (y \neq w) \wedge (y \neq z) \wedge \neg \text{SameSize}(w, z))$$

□