MAT115 - Devoir #2

À remettre le **mardi 10 février avant 23h59**.
Tout retard entraînera jusqu'à 33% de pénalité par jour.

Pondération. Ce travail compte pour 5% des points de la session.
Modalités. Considérez les points suivants.

- Le travail peut être fait seul ou en équipe de deux.
- Le devoir doit être remis en format pdf via turnin. La provenance de votre pdf n'a pas d'importance — ce pdf peut provenir d'un export d'un fichier Word ou d'un fichier texte, d'un scan de vos écrits/dessins, etc.

  Il n'y a pas de norme de présentation particulière. Écrivez lisiblement, et assurez-vous que vos noms et CIP apparaissent clairement sur le devoir remis.
- Sauf indication contraire, vous pouvez utiliser les résultats démontrés en classe et dans les solutionnaires d'exercices sans avoir à les démontrer (par exemple, par exemple, vous pouvez utiliser les tables des lois de la logique). Par contre, si vous utilisez de nouveaux résultats, vous devez les démontrer.

Question 1 : modèles, satisfaisabilité et autres (8×4 **points**)

a. Dites si la formule suivante est satisfaisable. Vous devez justifier votre réponse

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4)$$

<u>**Solution.**</u>
Oui c'est satisfaisable. Par exemple, on peut poser la valuation $[x_1 := 0, x_2 = 1, x_3 := 0, x_4 = 0]$. Considérons chacune des quatre expressions entre parenthèses (ce qu'on appelle des clauses dans le jargon). L'expression 1 est vraie à cause de $x_2 = 1$, l'expression 2 est vraie à cause de $x_1 = 0$, l'expression 3 est vraie à cause de $x_1 = 0$, l'expression 4 est vraie à cause de $x_3 = 0$, l'expression 5 est vraie à cause de $x_2 = 1$. Chaque expression étant vraie, la conjonction est aussi vraie. Donc cette valuation satisfait la formule.

Toute autre valuation bien justifiée qui satisfait la formule est acceptée. □

b. Déterminez si l'ensemble de formule suivant est cohérent. Vous devez justifier votre réponse.

$$\neg(p \vee q)$$
$$\neg p \Rightarrow r$$
$$q \vee \neg r$$

<u>**Solution.**</u>
Non. Si on veut trouver un modèle pour ces formules, on regarde ce qui est forcé. La première formule est équivalente à $\neg p \wedge \neg q$, donc nous sommes forcés de mettre $p := 0$ et $q := 0$. Ensuite, $\neg p \Rightarrow r$ force à mettre $r := 1$. Mais on a $q \vee \neg r$ qui n'est pas vrai. Il est donc impossible de satisfaire toutes ces formules avec une valuation. □

c. Soient A et B deux ensembles de formules. On dit que B est une *conséquence logique* de A si tout modèle de A est aussi un modèle de B.

La notation pour indiquer que B est une conséquence logique de A est

$$A \vDash B$$

Dans vos mots, décrivez une façon de vérifier que $A \vDash B$ (l'efficacité de votre approche n'a pas d'importance, vous devez seulement décrire une méthode qui fonctionne).

<u>**Solution.**</u>
Rappelons qu'un modèle de A est une assignation des variables qui rend toutes les formules de A vraies.

On peut construire la table de vérité pour les formules de A et celles pour B. Pour chaque assignation des variables qui rend toutes les formules de A vraies, on regarde si cette assignation rend aussi toutes les formules de B vraies. Si c'est toujours le cas, alors $A \vDash B$ (et sinon, $A \vDash B$ n'est pas vrai). □

d. Soit A défini selon les trois formules

$$A = \begin{array}{l} p \vee q, \\ \neg q \Rightarrow r, \\ \neg r \vee \neg p \end{array}$$

et B défini selon les deux formules

$$B = \begin{array}{l} \neg(p \wedge q \wedge \neg r), \\ (p \vee \neg q) \wedge (p \vee r) \end{array}$$

Est-ce que $A \models B$? Justifiez votre réponse.

Solution.
Non. On pourrait présenter la table de vérité, mais on peut aussi argumenter comme suit.

On peut vérifier que $[p := 1, q := 1, r := 0]$ est un modèle pour A. Par contre, ce n'est pas un modèle pour B. La première formule de B est équivalente à $\neg p \vee \neg q \vee r$, qui n'est pas satisfaite par la valuation ci-haut. □

Question 2 : interprétation de formules (6×5.5 points)

Nous modélisons les chaînes de caractères en logique du premier ordre. Une chaîne de caractères est une suite de symboles numériques (0-9) ou alphabétiques, en minuscule (a-z). La *longueur* d'une chaîne est le nombre d'éléments dans la suite. Par exemple, `bonjour` est une chaîne de longueur 7. Une chaîne est *numérique* si tous ses symboles sont des chiffres, et elle est *alphabétique* si tous ses symboles sont des lettres. Par exemple, `2023` est numérique, `salut` est alphabétique, et `mat115` n'est aucun des deux.
On définit les prédicats suivants:

- pour une chaîne x, $alpha(x)$ est *vrai* si et seulement si x est alphabétique;
- pour une chaîne x, $num(x)$ est *vrai* si et seulement si x est numérique;
- pour deux chaînes x, y, $plusCourt(x, y)$ est *vrai* si et seulement si la longueur de x est plus petite que la longueur de y (si les longueurs sont égales, c'est $faux$);
- pour deux chaînes x, y, $diff(x, y)$ est *vrai* si et seulement si x, y sont différentes, c'est-à-dire qu'elles ont une longueur différente, ou bien elles ont une position qui contient un symbole différent.

Pour chacune des formules suivantes, vous devez (1) donner un univers contenant au moins trois chaînes qui rendent la formule vraie; et (2) donner un univers contenant au moins trois chaînes qui rendent la formule fausse. Vous n'avez pas à vous justifier, sauf dans le cas d'une tautologie ou d'une contradiction. Donc, si (1) ou (2) est impossible, vous devez justifier pourquoi.
Je fais le premier afin de donner un exemple.

a. $\forall x \cdot \forall y \cdot (num(x) \land alpha(y) \Rightarrow plusCourt(x, y))$
Réponse:
Pour rendre vrai: `115, allo, bonjour`
Pour rendre faux: `503711, allo, bonjour`

b. $\forall x \cdot \forall y \cdot (plusCourt(x, y) \Rightarrow num(x) \land alpha(y))$

Solution.
Il faut éviter d'avoir deux chaînes numériques ou alphabétiques de longueurs différentes, sinon l'implication sera fausse. Il faut aussi que les numériques soient plus courtes que les alphabétiques.

Pour rendre vrai: `115, 436, allo, ciao`. Ou encore, `mat115, ift436, ift339`, ce qui rend l'implication vraie car $plusCourt(x, y)$ est toujours faux.

Pour rendre faux: `12345, salut, allo`. □

c. $\forall x \cdot \forall y \cdot (alpha(x) \land num(y) \Rightarrow diff(x, y))$

Solution.
J'accepte deux réponses.

La réponse attendue est que c'est une tautologie. Pour n'importe quels x, y, si $alpha(x) \land num(y)$ est faux, l'implicaton est vraie. Si $alpha(x) \land num(y)$ est vrai, alors x et y doivent être différents, car elles ont des symboles différents. Encore là, l'implication est vraie. Donc dans tous les cas, l'implication est vraie et c'est donc une tautologie.

Par contre, il y avait une façon très subtile de rendre la formule fausse. On peut définir l'univers comme $\emptyset$ trois fois, où $\emptyset$ est la chaîne vide (de longueur 0). Ceci est valide car j'ai dit que vous pouviez répéter la même chaîne dans votre univers (ce que je vais enlever à l'avenir). La chaîne vide est techniquement alphabétique ET numérique, mais $diff(\emptyset, \emptyset)$. On pouvait donc accepter cette réponse. $\square$

d. $\exists x \cdot \forall y \cdot (diff(x, y) \Rightarrow plusCourt(x, y))$

Solution.
Pour rendre vrai: il faut juste une chaîne unique plus courte que toutes les autres: `allo, salut, bonjour`. Le 'allo' satisfait l'existentiel.

Pour rendre faux: `123, 456, 789`. Peu importe qui on choisit comme x, il y a un y différent mais pas plus court. $\square$

e. $\forall x \cdot \exists y \cdot (plusCourt(x, y))$

Solution.
J'accepte deux réponses.

Ceci est toujours faux, du moins si on exige un ensemble **fini** avec au moins trois chaînes de caractères. Si on prend x comme la chaîne la plus longue de notre ensemble, il n'existe pas de y tel que x est plus court que y. Donc le $\forall$ ne peut pas être vrai.

Si on permet un univers infini, alors on peut décrire l'univers $\{a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$ et la formule est vraie. J'acceptais aussi. Bravo à la personne qui a répondu ça, pour être honnête je ne l'avais pas vu. $\square$

f. $(\exists x \cdot \neg(alpha(x) \vee num(x))) \Rightarrow \neg(\exists x \cdot (alpha(x) \vee num(x)))$

Solution.
Cette formule dit que s'il y a un x non-alphabétique et non-numérique, alors il n'existe pas de x alphabétique ou numérique.

Pour rendre vrai: une façon est de mettre toutes les chaînes numériques ou alphabétiques, ex: `allo, salut, 12345`.

Une autre façon est de tout mettre non-alphabétique et non-numérique: `mat115, ift436, ift339`

Pour rendre faux: `mat115, allo, 123` $\square$

g. $\forall x \cdot \exists y \cdot \forall z \cdot (alpha(x) \wedge alpha(z) \wedge plusCourt(z, x) \Rightarrow num(y) \wedge plusCourt(z, y))$

Solution.
Pour tous les x alphabétiques, il faut un y numérique qui est plus long que tous les z alphabétiques plus courts que x.

Pour rendre vrai: un met un y numérique plus long que toutes les autres chaînes. Par ex: `allo, salut, 123456789`.

Pour rendre faux: on ne met pas de chaîne numérique: `allo, salut, bonjour`. $\square$

Question 3 : arbres de preuves (5×7 points)

Construisez l'arbre de preuve de chacun des énoncés suivants. Je joins une version texte que vous pouvez copier-coller dans Panda. Vous pouvez remettre une capture d'écran de Panda.

a. $\neg\neg p \Rightarrow p \vee q$
   ((not (not p)) imply (p or q))

b. $((p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge ((\neg p) \vee q)))$
   ((p and q) imply (p and ((not p) or q)))

c. $(((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge p) \Rightarrow r$
   ((((p or q) imply r) and p) imply r)

d. $(p \vee \neg p) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow (p \vee (\neg p \wedge q)))$
   ((p or (not p)) imply ((p or q) imply (p or ((not p) and q))))

e. $(\neg p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$
   ((((not p) or q) and (not q)) imply (not p))

Solution.

a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\neg\mathbf{p}}^{(1)}}{\mathbf{p}}{\scriptstyle (E\neg\neg)}}{(\mathbf{p}\vee\mathbf{q})}{\scriptstyle (I\vee)}}{(\neg\neg\mathbf{p}\to(\mathbf{p}\vee\mathbf{q}))}{\scriptstyle (I\to)}(1)$$

b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})}^{(1)}}{\mathbf{p}}{\scriptstyle (E\wedge)} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})}^{(1)}}{\mathbf{q}}{\scriptstyle (E\wedge)}}{(\neg\mathbf{p}\vee\mathbf{q})}{\scriptstyle (I\vee)}}{(\mathbf{p}\wedge(\neg\mathbf{p}\vee\mathbf{q}))}{\scriptstyle (I\wedge)}}{((\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})\to(\mathbf{p}\wedge(\neg\mathbf{p}\vee\mathbf{q})))}{\scriptstyle (I\to)}(1)$$

c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{(((\mathbf{p}\vee\mathbf{q})\to\mathbf{r})\wedge\mathbf{p})}^{(1)}}{((\mathbf{p}\vee\mathbf{q})\to\mathbf{r})}{\scriptstyle (E\wedge)} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{(((\mathbf{p}\vee\mathbf{q})\to\mathbf{r})\wedge\mathbf{p})}^{(1)}}{\mathbf{p}}{\scriptstyle (E\wedge)}}{(\mathbf{p}\vee\mathbf{q})}{\scriptstyle (I\vee)}}{\mathbf{r}}{\scriptstyle (E\to)}}{((((\mathbf{p}\vee\mathbf{q})\to\mathbf{r})\wedge\mathbf{p})\to\mathbf{r})}{\scriptstyle (I\to)}(1)$$

d)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{(\mathbf{p}\vee\mathbf{q})}^{(2)} \qquad \dfrac{\cancel{\mathbf{p}}^{(3)}}{(\mathbf{p}\vee(\neg\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}))}{\scriptstyle (I\vee)} \qquad \dfrac{\cancel{(\mathbf{p}\vee\neg\mathbf{p})}^{(1)} \qquad \dfrac{\cancel{\mathbf{p}}^{(5)}}{(\mathbf{p}\vee(\neg\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}))}{\scriptstyle (I\vee)} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\mathbf{p}}^{(6)} \quad \cancel{\mathbf{q}}^{(4)}}{(\neg\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})}{\scriptstyle (I\wedge)}}{(\mathbf{p}\vee(\neg\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}))}{\scriptstyle (I\vee)}}{(\mathbf{p}\vee(\neg\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}))}{\scriptstyle (E\vee)}(5)(6)}{(\mathbf{p}\vee(\neg\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}))}{\scriptstyle (E\vee)}(3)(4)}{((\mathbf{p}\vee\mathbf{q})\to(\mathbf{p}\vee(\neg\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})))}{\scriptstyle (I\to)}(2)}{((\mathbf{p}\vee\neg\mathbf{p})\to((\mathbf{p}\vee\mathbf{q})\to(\mathbf{p}\vee(\neg\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}))))}{\scriptstyle (I\to)}(1)$$

e)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{((\neg\mathbf{p}\vee\mathbf{q})\wedge\neg\mathbf{q})}^{(1)}}{(\neg\mathbf{p}\vee\mathbf{q})}{\scriptstyle (E\wedge)} \qquad \dfrac{\cancel{\mathbf{p}}^{(2)} \quad \cancel{\neg\mathbf{p}}^{(3)}}{\perp}{\scriptstyle (I\perp)} \qquad \dfrac{\cancel{\mathbf{q}}^{(4)} \quad \dfrac{\cancel{((\neg\mathbf{p}\vee\mathbf{q})\wedge\neg\mathbf{q})}^{(1)}}{\neg\mathbf{q}}{\scriptstyle (E\wedge)}}{\perp}{\scriptstyle (I\perp)}}{\perp}{\scriptstyle (E\vee)}(3)(4)}{\neg\mathbf{p}}{\scriptstyle (I\neg)}(2)}{(((\neg\mathbf{p}\vee\mathbf{q})\wedge\neg\mathbf{q})\to\neg\mathbf{p})}{\scriptstyle (I\to)}(1)$$

□