MAT115 - Devoir #3

À remettre le **vendredi 20 février avant 23h59**.
Tout retard entraînera jusqu'à 33% de pénalité par jour.

Pondération. Ce travail compte pour 5% des points de la session.
Modalités. Considérez les points suivants.

- Le travail peut être fait seul ou en équipe de deux.
- Le devoir doit être remis en format pdf via turnin, mais vous pouvez aussi joindre un fichier .mch. La provenance de votre pdf n'a pas d'importance — ce pdf peut provenir d'un export d'un fichier Word ou d'un fichier texte, d'un scan de vos écrits/dessins, etc.

  Il n'y a pas de norme de présentation particulière. Écrivez lisiblement, et assurez-vous que vos noms et CIP apparaissent clairement sur le devoir remis.
- Sauf indication contraire, vous pouvez utiliser les résultats démontrés en classe et dans les solutionnaires d'exercices sans avoir à les démontrer (par exemple, par exemple, vous pouvez utiliser les tables des lois de la logique). Par contre, si vous utilisez de nouveaux résultats, vous devez les démontrer.

Question 1 : modélisation d'une carte avec ensembles et relations (10×6 points)

Dans cette question, nous allons modéliser le plan d'une ville à l'aide des ensembles, fonctions et relations. Un *lieu* est un endroit d'intérêt. Nous modélisons trois types de lieux: les commerces, les résidences et les intersections. Vous pouvez supposer que trois ensembles correspondants ont été définis et vous sont donnés: Commerce, Residence, Intersection.
L'ensemble Lieu de tous les lieux est donc

$$Lieu = Commerce \cup Residence \cup Intersection$$

On suppose qu chaque lieu fait partie d'un seul de ces trois ensembles (et pas deux ni trois). Ceci s'exprime par:

$$(Commerce \cap Residence = \emptyset) \wedge (Commerce \cap Intersection = \emptyset) \wedge (Residence \cap Intersection = \emptyset).$$

Une rue sert à lier deux lieux. Chaque rue a une direction. Pour deux lieux x et y, on représente le fait qu'une rue mène de x à y avec le couple (x, y). Notez que ceci n'est pas équivalent à (y, x). La relation Rue contient tous les couples (x, y) qui forment des rues. On suppose qu'il n'y a pas de rue qui va d'un lieu au même lieu (donc, (x, x) n'est jamais une rue).
Vous devez spécifier les ensembles et relations qui sont donnés ci-bas. Vous pouvez remettre vos réponses sur papier avec le formalisme vu en classe, ou vous pouvez remettre en langage ProB (un fichier .mch contenant un exemple est disponible).

a. Edifice, qui contient les commerces et les résidences. Vous ne devez pas utiliser une définition par compréhension.

Solution.

$$Edifice = Commerce \cup Residence$$

□

b. Puit, qui contient les lieux x desquels on ne peut pas sortir, c'est-à-dire, qu'aucune rue ne permet d'aller de x vers un autre lieu.

Solution.

$$Puit = \{x \mid x \in Lieu \wedge \neg(\exists y \cdot ((x, y) \in Rue))\}$$

La syntaxe $\{x \in Lieu \mid \ldots\}$ est aussi acceptable (i.e. mettre l'appartenance à Lieu avant le "|").

Notez aussi que $\neg(\exists y \cdot A)$ est équivalent à $\forall y \cdot \neg A$. Vous auriez aussi pu écrire quelque chose du style:

$$Puit = \{x \mid x \in Lieu \wedge \forall y \cdot ((x, y) \notin Rue)\}$$

□

c. Source, qui contient les lieux x où on ne peut pas entrer, c'est-à-dire, qu'aucune rue ne permet d'aller d'un autre lieu vers x.

Solution.

$$Source = \{x \mid x \in Lieu \land \neg\exists y \cdot (y \in Lieu \land (y, x) \in Rue)\}$$

$\square$

d. Interne, qui contient les lieux qui ne sont pas des puits, ni des sources. N'utilisez pas une définition par comprehension.

Solution.

$$Interne = Lieu \setminus (Puit \cup Source)$$

$\square$

e. Adjacence, qui contient tous les ensembles de deux lieux $\{x, y\}$ tels qu'au moins un de (x, y) ou (y, x) est une rue. Pour la suite du devoir, si $\{x, y\} \in Adjacence$, on dira que x est adjacent à y et que y est adjacent à x.

Notez que vous pouvez définir un ensemble d'ensembles par $\{\{x, y\} \mid \ldots\}$. Par contre, dans ProB, il faut une syntaxe du style $\{T|T \subseteq Lieu \land |T| = 2 \ldots\}$.

Solution.

$$Adjacence = \{\{x, y\} \mid x \in Lieu \land y \in Lieu \land ((x, y) \in Rue \lor (y, x) \in Rue)\}$$

Notons qu'il faudrait techniquement vérifier que $x \neq y$, mais ce n'est pas requis car on suppose que $(x, x) \notin Rue$.

J'acceptais aussi une forme du style:

$$\begin{aligned} Adjacence = \{T \mid T \subseteq Lieu \land |T| = 2 \land \\ \forall x, y \cdot (x \in T \land y \in T \land x \neq y \Rightarrow (x, y) \in Rue \lor (y, x) \in Rue)\}. \end{aligned}$$

Je pénalisais si vous mettiez $Adjacence = \{(x, y)| \ldots\}$. $\square$

f. Isole, qui contient les résidences et les commerces qui n'ont aucune adjacence.

Solution.
Plusieurs réponses possibles. En voici une:

$$Isole = \{x \mid x \in Edifice \land \neg\exists y \cdot (\{x, y\} \in Adjacence)\}$$

ou encore

$$Isole = Edifice \cap Puit \cap Source$$

$\square$

g. SemiIsole, qui contient les résidences qui sont seulement adjacentes à des intersections.

Solution.

$$SemiIsole = \{x \mid x \in Residence \land \forall y \cdot (\{x, y\} \in Adjacence \Rightarrow y \in Intersection)\}$$

□

h. Chemin, qui contient l'ensemble des couples (x, y) tels qu'il existe un chemin de x à y. Notez qu'un chemin est une séquence de rues $(x, z_1), (z_1, z_2), \ldots, (z_k, y)$ dont le départ est x et la fin est y. La longueur du chemin est arbitraire.

On dira que x est capable d'atteindre y s'il existe un chemin de x à y.

Solution.
La question ne spécifiait pas clairement s'il existait un chemin de x à x, alors j'acceptais

$$Chemin = Rue^*$$

ou bien

$$Chemin = Rue^+$$

(que je n'ai pas présenté — c'est comme Rue^*, sauf que (x, x) ne sont pas inclus automatiquement).

Si vous n'avez pas utilisé de fermeture transitive, ça ne fonctionne probablement pas: on ne peut pas spécifier un chemin de longueur arbitraire avec la syntaxe vue en classe. □

i. SansClient, qui contient tous les commerces qu'aucune résidence n'est capable d'atteindre.

Solution.

$$SansClient = \{x \mid x \in Commerce \land \neg\exists y \cdot (y \in Residence \land (y, x) \in Chemin)\}$$

□

j. Monopole, qui contient tous les commerces x tels que toute résidence capable d'atteindre x n'est pas capable d'atteindre un commerce autre que x.

Solution.

$$\begin{aligned} Monopole = \{x \mid x \in Commerce \land & \\ & \forall y, z \cdot (y \in Residence \land (y, x) \in Chemin \land \\ & z \in Commerce \land (y, z) \in Chemin \Rightarrow z = x\} \end{aligned}$$

□

Question 2 : gérez vos relations ($16 + 3 \times 8$ points)

Répondez aux questions suivantes sur les relations.

a. Cette question donne suite à la question 1. On définit la relation CheminBidir, qui inclut les paires de lieux x et y telles que l'on peut aller de x à y, et de y à x. On considère que tout lieu x devrait être en relation avec lui-même. Formellement, la définition est:

$$\begin{aligned} \mathit{CheminBidir} = \{(x, y) \mid x \in \mathit{Lieu} \land y \in \mathit{Lieu} \land \\ (x = y \lor ((x, y) \in \mathit{Chemin} \land (y, x) \in \mathit{Chemin}))\} \end{aligned}$$

Argumentez que CheminBidir est une relation d'équivalence.

Solution.
On doit montrer que CheminBidir est réflexive, symétrique et transitive.

CheminBidir est réflexive: soit $x \in \mathit{Lieu}$. On voit que $(x, x) \in \mathit{CheminBiDir}$, car le couple (x, x) satisfait les conditions $x \in \mathit{Lieu}, y \in \mathit{Lieu}, x = y$ dans la construction.

CheminBiDir est symétrique: soit $(x, y) \in \mathit{CheminBidir}$ avec $x \neq y$. Il faut argumenter que $(y, x) \in \mathit{CheminBidir}$. Par la définition de CheminBidir, il doit être vrai que $(x, y) \in \mathit{Chemin}$ et $(y, x) \in \mathit{Chemin}$. Puisqu'on se demande si $(y, x) \in \mathit{Chemin}$, on voit que le couple (y, x) satisfait la condition que $(y, x) \in \mathit{Chemin}$ et $(x, y) \in \mathit{Chemin}$, et donc le couple (y, x) fera aussi partie de CheminBidir. La relation est donc symétrique.

CheminBidir est transitive: soit x, y, z tels que $(x, y) \in \mathit{CheminBidir}$ et $(y, z) \in \mathit{CheminBidir}$. On doit argumenter que $(x, z) \in \mathit{CheminBidir}$. Il existe un chemin de x à z, car on peut concaténer le chemin de x à y avec celui de y à z, pour aller de x à z. Donc $(x, z) \in \mathit{Chemin}$.

De plus $(x, y) \in \mathit{CheminBidir}$ implique qu'il existe un chemin de y à x et $(y, z) \in \mathit{CheminBidir}$ implique qu'il existe un chemin de z à y. On peut concaténer le chemin de z à y suivi du chemin de y à x pour aller de z à x. Donc $(z, x) \in \mathit{Chemin}$. Bref, on peut aller de x à z, et aussi de z à x, et donc $(x, z) \in \mathit{CheminBidir}$, tel que désiré.

$\square$

b. Soit S un ensemble quelconque et $R \subseteq S \times S$ une relation homogène sur S.

Vrai ou faux: si R est asymétrique, alors R est toujours antisymétrique. Justifiez votre réponse.

Solution.
Vrai. Puisqu'avec l'asymétrie, $(x, y) \in R$ implique $(y, x) \notin R$, le cas $(x, y) \in R \land (y, x) \in R$ ne se présente jamais, alors l'implication requise dans la définition d'antisymétrique est toujours vraie. $\square$

c. Soit S un ensemble quelconque et $R \subseteq S \times S$ une relation homogène sur S.

Vrai ou faux: si R est antisymétrique, alors R est toujours asymétrique. Justifiez votre réponse.

Solution.
Faux. Une relation antisymétrique permet $(x, x) \in R$, ce qui n'est pas permis dans une relation asymétrique. $\square$

d. Soit $U = \{a, b, c, d\}$. Donnez un exemple de fonction totale f dont le domaine est U, telle que f n'est pas l'identité et telle que f est une relation transitive. Aucune justification requise.

Solution.
$f = \{(a, b), (b, b), (c, c), (d, d)\}$ $\square$