

MAT115 - Exercices sur les automates à états finis

Manuel Lafond

Exercice 1: Pour chacun des ensembles de mots suivant, donnez un automate fini (déterministe ou non) qui accepte les mots de cet ensemble. À vous de décider d'un alphabet pertinent.

- a. Les chaînes de caractères qui représentent des entiers, possiblement négatifs. Le caractère “-” pour le moins peut donc apparaître.
- b. Les chaînes de caractères qui représentent des nombres réels, avec le point comme séparateur de décimales.
- c. Les cip. Un cip est une chaîne contenant quatre lettres suivies de quatre chiffres.
- d. Les entiers positifs, avec une virgule avant chaque groupe de trois chiffres (quand on lit de droite à gauche). Par exemple, 1,000,000 ou encore 22,542,367,754,576. S’il y a trois chiffres ou moins, il ne devrait pas y avoir de virgule.
- e. Les chaînes de caractères contenant la sous-chaîne “mat”. Essayez de faire un automate non-déterministe avec 4 états.
- f. Les chaînes de caractères contenant au moins trois occurrences de la sous-chaîne “mat”.
- g. Les chaînes de caractères contenant la sous-chaîne “maman”.
Faites un AFND et un AFD.
- h. Les chaînes de caractères contenant au moins une occurrence de “ma” et au moins une occurrence de “mo”.
- i. L'ensemble des mots sur alphabet $\{a, b\}$ qui contiennent “a” seulement à des positions paires.
- j. L'ensemble des mots sur alphabet $\{a, b\}$ qui terminent par “aaaaa”.

- k. L'ensemble des mots sur alphabet $\{a, b\}$ tels que la k -ième lettre à partir de la fin est un "a". Par exemple, pour $k = 3$, bbbabb serait accepté, mais pas aaaabaa. La taille de votre automate peut dépendre du paramètre k . Essayer de faire un version non-déterministe, puis une version déterministe.

Exercice 2: Déterminez des automates. Faites les exercices des notes de cours de Marc Frappier, Chapitre 4 section exercices, numéro 9.

Exercice 3: Minimisez des automates. Faites les exercices des notes de cours de Marc Frappier, Chapitre 4 section exercices, numéro 10.

Exercice 4: Soit Σ un alphabet et $M \subseteq \Sigma^*$ un ensemble de mots. On dit que M est *régulier* s'il existe un automate fini A tel que $L(A) = M$.

- a. Montrez que si M est régulier, alors $\Sigma^* \setminus M$ est régulier.
 b. Soit M_1, M_2 deux ensembles de mots réguliers, ainsi que l'ensemble

$$M_1 \hat{\ } M_2 = \{w \mid w = u \hat{\ } v \wedge u \in M_1 \wedge v \in M_2\}$$

où $\hat{\ }$ est le symbole de concaténation. Donc $u \hat{\ } v$ est le mot obtenu en ajoutant v à la fin de u . Par exemple, si $u = allo$ et $v = bonjour$, alors $u \hat{\ } v = allobonjour$.

Montrez que $M_1 \hat{\ } M_2$ est régulier.

- c. Soit $M_1, M_2 \subseteq \Sigma^*$. Montrez que si M_1 et M_2 sont réguliers, alors $M_1 \cap M_2$ est régulier.
 d. Soit $w \in \Sigma^*$. On écrit $rev(w)$ pour dénoter l'inverse de w , c'est-à-dire le mot w lu de droite à gauche. Par exemple, si $w = allo$, alors $rev(w) = olla$. Pour $M \subseteq \Sigma^*$, on définit

$$rev(M) = \{w \mid w \in \Sigma^* \wedge rev(w) \in M\}$$

Montrez que si M est régulier, alors $rev(M)$ est régulier.

- e. (défi) Soit M un langage. On définit

$$suf\ fixes(M) = \{w \mid w \in \Sigma^* \wedge \exists u \cdot (u \in \Sigma^* \wedge concat(u, w) \in M)\}$$

Dit autrement, $\text{suffixes}(M)$ contient tous les mots de M , ainsi que tous les suffixes des mots de M .

Montrez que si M est un langage régulier, alors $\text{suffixes}(M)$ est un langage régulier.

Idée: considérez un automate A pour M minimisé. Donc chaque état de A est accessible par un mot u , et donc chaque peut être vu comme un “producteur de suffixes”.

Exercice 5: Démontrez que la procédure vue en classe pour déterminer un automate fini non-déterministe ne donne pas nécessairement un automate minimal.

Exercice 6: (défi) Soit M l'ensemble des mots de la forme $a^n b^n$ pour un entier n . Dit autrement, M est constitué des mots constitués d'une série de a , suivie d'une série de b , tels qu'il y a autant de a que de b . Par exemple, $aaabbb$ ou ab sont dans M , mais pas $aaaabbb$ ni $aababb$.

Démontrez qu'il n'existe pas d'automate fini dont le langage est M .