MAT115 - Exercices sur la logique du premier ordre (suite)

Manuel Lafond

Exercices sur papier

Exercice 1: Donnez la liste de tous les modèles de la formule suivante:

$$x_1 \vee x_2 \Rightarrow \neg(x_1 \vee x_3)$$

Solution.
Rappelons qu'un modèle est simplement une valuation qui satisfait la formule. Une façon de trouver les modèles est de construire la table de vérité.

x_1	x_2	x_3	$x_1 \vee x_2$	$\neg(x_1 \vee x_3)$	$(x_1 \vee x_2) \Rightarrow \neg(x_1 \vee x_3)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

On voit qu'il y a 3 modèles: $[x_1 := 0, x_2 := 0, x_3 := 0], [x_1 := 0, x_2 := 0, x_3 := 1], [x_1 := 0, x_2 := 1, x_3 := 0]$. □

Exercice 2: Dites si la formule suivante est satisfaisable:

$$\begin{aligned}&(x_1 \vee x_2 \Rightarrow \neg(x_1 \vee x_3)) \wedge \\ &\neg(x_1 \vee \neg x_2) \wedge \\ &\neg x_3\end{aligned}$$

Solution.
Notons que chaque ligne de la formule est liée par un $\wedge$. Pour voir le problème

d'une manière plus simple, on peut voir chaque ligne comme une formule séparée, et il faut trouver une valuation qui satisfait toutes ces formules.
Pour trouver une telle valuation, on voit que la formule à la ligne 3 nous impose de mettre $x_3 := 0$. Ensuite, la formule à la ligne 2 est équivalente à $\neg x_1 \wedge \neg\neg x_2$ via la loi de De Morgan, ce qui est équivalent à $\neg x_1 \wedge x_2$. Ceci impose $x_1 := 0$ et $x_2 := 1$. La seule valuation possible pour ces deux formules est $[x_1 := 0, x_2 := 1, x_3 := 0]$.
Il reste à vérifier que la formule à la ligne 1 est satisfaite. Avec cette valuation, on voit que $x_1 \vee x_2$ est vrai, et $\neg(x_1 \vee x_3)$ est aussi vrai, donc l'implication est vraie. Au final, cette valuation rend toutes les sous-formules vraies, donc la formule est satisfaisable. □

Exercice 3: Dites si la formule suivante est satisfaisable:

$$
\begin{aligned}
&(x_1 \vee x_2) \wedge \\
&(\neg x_1 \vee x_3) \wedge \\
&(\neg x_1 \Rightarrow \neg x_2) \wedge \\
&(\neg(x_3 \wedge x_1))
\end{aligned}
$$

Solution.
Comme au dernier exercice, on peut voir chaqie ligne comme une sous-formule à satisfaire. Personnellement, je préfère tout simplifier les sous-formules et enlever les implications, si possible, afin d'avoir tout sous la même forme.
On peut réécrire la sous-formule à la ligne 3 comme $\neg\neg x_1 \vee \neg x_2 \equiv x_1 \vee \neg x_2$, et celle à la ligne 4 comme $\neg x_3 \vee \neg x_1$ via De Morgan, alors on va évaluer la formule équivalente

$$
\begin{aligned}
&(x_1 \vee x_2) \wedge \\
&(\neg x_1 \vee x_3) \wedge \\
&(x_1 \vee \neg x_2) \wedge \\
&(\neg x_3 \vee \neg x_1)
\end{aligned}
$$

Ensuite, tentons de poser $x_1 := 0$. La sous-formule à la ligne 1 impose alors $x_2 := 1$. Par contre, à la ligne 3, $(x_1 \vee \neg x_2)$ est fausse, et donc aucune assignation avec $x_1 := 0$ ne peut satisfaire la formule en entier.
On tente alors de poser $x_1 := 1$. La ligne 4 impose $x_3 := 0$. Mais alors, la

ligne 2 ($\neg x_1 \vee x_3$) est fausse. Donc aucune assignation avec $x_1 := 1$ ne peut satisfaire la formule en entier.
Puisque toutes les façons d'assigner x_1 ne permettent pas de satisfaire la formule, elle n'est pas satisfaisable.

□

Exercice 4: Reprenons la logique du premier ordre et les prédicats définis dans Tarski-UdeS. Pour chacune des affirmations suivantes, donnez un univers de formes qui rend la formule vraie, et une qui rend la formule fausse. Si la formule est une tautologie ou une contradiction, dites-le. Vos réponses devraient être justifiées.

a. $\forall x \cdot \exists y \cdot (x \neq y \wedge (Smaller(x, y) \Rightarrow LeftOf(x, y)))$

Solution.
Pour rendre vrai: on peut mettre un petit carré en colonne 1, un grand triangle à sa droite. Ou encore, s'il y a au moins deux formes et qu'il n'y a pas de carré, la formule est vraie car l'implication est vraie (par exemple on pourrait mettre 50 triangles).

Pour rendre faux: on met un petit carré, et un grand carré à sa gauche. Dans ce cas, quand x est le petit carré, le seul y existant avec $x \neq y$ ne satisfiat pas l'implication.

Notez aussi que si on met une seule forme, la formule est fausse. □

b. $\forall x \cdot \exists y \cdot (Smaller(x, y) \Rightarrow LeftOf(x, y))$

Solution.
Pour rendre vrai: un ensemble vide de formes (s'il y a 0 formes, le $\forall$ est vrai automatiquement).

Ou pour une solution moins triviale, un petit carré en colonne 1, un grand triangle à sa droite.

Pour rendre faux: à priori, on pourrait penser qu'on pourrait mettre un grand triangle en colonne 1, un petit carré à sa droite.

Mais ça ne rend pas la formule fausse! Si l'univers est non-vide, pour tout x possible, on peut toujours poser $y = x$ dans l'existentiel. Quand $y = x$, l'implication $Smaller(x, x) \Rightarrow LeftOf(x, x)$ est *vraie*, car $Smaller(x, x)$ est faux. Donc il n'y a aucune façon de rendre cette formule fausse.

□

c. $\exists x \cdot (\exists y \cdot x \neq y) \wedge \forall y \cdot (LeftOf(x, y) \Rightarrow \forall z \cdot (Smaller(x, z))$

Solution.
Il faut lire cette affirmation comme: il y a un x tel qu'il existe au moins un y différent. De plus, pour tout y, si x est à gauche de y, alors x est plus petit que tout z. On note que $\forall z(Smaller(x, z))$ ne peut *jamais* être vrai, à cause du cas $x = z$.

Pour rendre vrai: on met une forme f à la dernière colonne, et une autre forme n'importe où. Avec $x = f$, l'énoncé est vrai car l'autre forme peut servir de y. De plus, il n'y a rien à droite de x, donc l'implication dans le $\forall y$ est toujours vraie.

Pour rendre faux: on met une seule forme. Dans ce cas, aucune forme ne peut servir de y dans le $\exists y$. □

d. $\forall x \cdot \forall y \cdot ((Square(x) \Rightarrow Small(y)) \vee (Square(x)) \wedge \neg Small(y))$

Solution.
Cette formule demande que pour toute paire de formes, si x est un carré, alors y est petit, ou bien x est un carré et y n'est pas petit (le parenthésage est volontairement mal fait, mais est valide).

Je prétends que c'est une tautologie, et donc que la formule est toujours vraies. Prenons une forme x. Si ce n'est pas un carré, alors l'implication $Square(x) \Rightarrow Small(y)$ est vraie pour tous les y. Supposons que x est un carré. Considérons un objet y. Si y est petit, l'implication est vraie. Si y n'est pas petit, $(Square(x)) \wedge \neg Small(y)$ est vrai. Donc quand x est un carré, le $\vee$ est vrai pour tout y. Bref, la formule est vraie pour tous les x et c'est une tautologie.

□

e. $\exists x \cdot Square(x) \wedge \forall x \cdot \exists y \cdot \forall z \cdot (Square(x) \Rightarrow Smaller(x, y) \wedge (z = x \vee z = y \vee LeftOf(z, y))$

Solution.
Pour rendre vrai: on doit avoir au moins un carré, qu'on met petit. Ensuite, on met une forme f grande dans la dernière colonne. On peut ensuite ajouter des formes petites et moyennes partout, sauf dans la dernière colonne.

La formule sera vraie car il y a au moins un carré, et pour tout x carré, on met $y = f$. L'implication sera vraie car x est plus petit que y, et que tout z autre que x ou y est à gauche de ce y.

Pour rendre faux: on ne met pas de carré.

$\square$