MAT115 - Notations sur les ensembles, relations et fonctions

Ensembles

Collection non-ordonnée d'objets, sans répétition.

- Définition par extension:
  $S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Ensembles

Collection non-ordonnée d'objets, sans répétition.

- Définition par extension:
  $S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
- Définition par compréhension:
  $S = \{x \mid \mathcal{A}\}$
  où $\mathcal{A}$ est une formule. Incluera tous les éléments x de l'univers qui satisfont $\mathcal{A}$.
  Certains remplacent le "$|$" par ":", donc
  $S = \{x \; : \; \mathcal{A}\}$

Ensembles

Collection non-ordonnée d'objets, sans répétition.

- Définition par extension:
  $S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
- Définition par compréhension:
  $S = \{x \mid \mathcal{A}\}$
  où $\mathcal{A}$ est une formule. Incluera tous les éléments x de l'univers qui satisfont $\mathcal{A}$.
  Certains remplacent le "|" par ":", donc
  $S = \{x \ : \ \mathcal{A}\}$
- On utilise parfois le raccourcis
  $S = \{x \in T \mid \mathcal{A}\}$
  pour indiquer qu'on considère seulement les éléments de T.
  Ceci remplace
  $S = \{x \mid x \in T \wedge \mathcal{A}\}$

Ensembles

Soit S et T deux ensembles. On utilise les notations:

- $\in$: $x \in S$: vrai si x est un élément de l'ensemble S.
- $\notin$: $x \notin S$: vrai si x n'est pas un élément de S.
- $|S|$: cardinalité de S, qui est le nombre d'éléments de S. Certains dénotent $card(S)$ ou $\#(S)$.
- $\emptyset$: ensemble vide. $|\emptyset| = 0$.
- $\subseteq$: $S \subseteq T$ si tout élément de S est dans T. Donc, $\forall x \cdot (x \in S \Rightarrow x \in T)$.

Ensembles

Soit S et T deux ensembles. On utilise les notations:

- $=$: $S = T$ si $S \subseteq T$ et $T \subseteq S$. Donc, S et T ont exactement les mêmes éléments.
- $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}(S) = \{T \mid T \subseteq S\}$.
  Ensemble des sous-ensembles de S.
  $|\mathbb{P}(S)| = 2^{|S|}$ (si S est fini)

Opérateurs d'ensembles

$\cup$: union des éléments de S et T
$S \cup T = \{x | x \in S \vee x \in T\}$

$\cap$: intersection de S et T
$S \cap T = \{x | x \in S \wedge x \in T\}$

$\setminus$: différence, éléments dans S mais pas dans T
$S \setminus T = \{x | x \in S \wedge x \notin T\}$

Note:
$S \cup T = T \cup S$
$S \cap T = T \cap S$
$S \setminus T \neq T \setminus S$ (exercice: décrire quand l'égalité est possible)

Relations

Une **relation** est un ensemble de couples (x, y). L'ordre est important dans un couple, $(x, y) \neq (y, x)$ (sauf si $x = y$).

- Produit cartésien (tous les couples possibles): $S \times T = \{(x, y) \mid x \in S \wedge y \in T\}$.
- $|S \times T| = |S| \cdot |T|$
- Une relation R de S à T est un sous-ensemble de $S \times T$: $R \subseteq S \times T$

Relations homogène

- Une relation R de S à S est appelée **homogène**.

Relations homogène

- Une relation R de S à S est appelée **homogène**.
- On peut représenter une relation homogène R sur S avec un **graphe orienté**. Flèche $x \to y$ si $(x, y) \in R$.

Relations homogène

- Une relation R de S à S est appelée **homogène**.
- On peut représenter une relation homogène R sur S avec un **graphe orienté**. Flèche $x \to y$ si $(x, y) \in R$.
- Boucle possible (flèche de x à x).

Relations homogène

- Une relation R de S à S est appelée **homogène**.
- On peut représenter une relation homogène R sur S avec un **graphe orienté**. Flèche $x \rightarrow y$ si $(x, y) \in R$.
- Boucle possible (flèche de x à x).
- $id(S)$: relation identité sur S: relation homogène sur S avec seulement les couples (x, x). On écrit juste id si S est clair selon le contexte.
  $id(S) = \{(x, x) \mid x \in S\}$

Composition de relations

Soit R une relation homogène sur S.

- $R; R$ dénote la relation R composée une fois. $R; R$ contient les couples (x, y) tel que x est lié à y via un intermédiaire.

Composition de relations

Soit R une relation homogène sur S.

- $R; R$ dénote la relation R composée une fois. $R; R$ contient les couples (x, y) tel que x est lié à y via un intermédiaire.
- $R; R = \{(x, y) \mid \exists z \cdot ((x, z) \in R \wedge (z, y) \in R)\}$

Composition de relations

Soit R une relation homogène sur S.

- $R; R$ dénote la relation R composée une fois. $R; R$ contient les couples (x, y) tel que x est lié à y via un intermédiaire.
- $R; R = \{(x, y) \mid \exists z \cdot ((x, z) \in R \land (z, y) \in R)\}$
- On dénote aussi $R; R = R^2$

Puissances de relations

- $R^0 = id$

Puissances de relations

- $R^0 = id$
- $R^1 = R$

Puissances de relations

- $R^0 = id$
- $R^1 = R$
- $R^2 = R; R$
  (x, y) tel qu'il y a un chemin de longueur 2 de x vers y.

Puissances de relations

- $R^0 = id$
- $R^1 = R$
- $R^2 = R; R$
  (x, y) tel qu'il y a un chemin de longueur 2 de x vers y.
- $R^3 = R^2; R$
  (x, y) tel qu'il y a un chemin de longueur 3 de x vers y.

Puissances de relations

- $R^0 = id$
- $R^1 = R$
- $R^2 = R; R$
  (x, y) tel qu'il y a un chemin de longueur 2 de x vers y.
- $R^3 = R^2; R$
  (x, y) tel qu'il y a un chemin de longueur 3 de x vers y.
- $R^n = R^{n-1}; R$
  (x, y) tel qu'il y a un chemin de longueur n de x vers y.

Fermeture d'une relation

- R^*: fermeture transitive et réflexive de R. Contient (x, y) tel qu'il existe un chemin de longueur quelconque de x vers y, incluant une longueur de 0.
- $$\begin{aligned} R^* &= R^0 \cup R^1 \cup R^2 \cup \dots \\ &= \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i \end{aligned}$$

Types de relation

Soit R une relation *homogène* sur S. Alors R est:

- **réflexive**: si $\forall x \in S \cdot ((x, x) \in R)$
  (tout x en lien avec lui-même)

Types de relation

Soit R une relation *homogène* sur S. Alors R est:

- **réflexive**: si $\forall x \in S \cdot ((x, x) \in R)$
  (tout x en lien avec lui-même)
- **symétrique**: si $\forall x, y \in S \cdot ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$
  (tous les couples dans les deux sens)

Types de relation

Soit R une relation *homogène* sur S. Alors R est:

- **réflexive**: si $\forall x \in S \cdot ((x, x) \in R)$
  (tout x en lien avec lui-même)
- **symétrique**: si $\forall x, y \in S \cdot ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$
  (tous les couples dans les deux sens)
- **transitive**: si
  $\forall x, y, z \in S \cdot ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$
  (si x se rend à z, alors (x, z) dans R)

Relations d'équivalence

Une relation R qui est réflexive, symétrique et transitive est appelée une **relation d'équivalence**.

- Dans une relation d'équivalence, on peut former des groupes $S_1, \ldots, S_k \subseteq S$ tels que pour chaque S_i, tous les éléments de S_i sont en relation entre eux. Ce sont des **classes d'équivalence**.

Types de relation II

Soit R une relation *homogène* sur S. Alors R est:

- **réflexive**: si $\forall x \in S \cdot ((x, x) \in R)$
  (tout x en lien avec lui-même)

Types de relation II

Soit R une relation *homogène* sur S. Alors R est:

- **réflexive**: si $\forall x \in S \cdot ((x, x) \in R)$
  (tout x en lien avec lui-même)
- **symétrique**: si $\forall x, y \in S \cdot ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$
  (tous les couples dans les deux sens)

Types de relation II

Soit R une relation *homogène* sur S. Alors R est:

- **réflexive**: si $\forall x \in S \cdot ((x, x) \in R)$
  (tout x en lien avec lui-même)
- **symétrique**: si $\forall x, y \in S \cdot ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$
  (tous les couples dans les deux sens)
- **transitive**: si
  $\forall x, y, z \in S \cdot ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$
  (si x se rend à z, alors (x, z) dans R)

Types de relation II

Soit R une relation *homogène* sur S. Alors R est:

- **réflexive**: si $\forall x \in S \cdot ((x, x) \in R)$
  (tout x en lien avec lui-même)
- **symétrique**: si $\forall x, y \in S \cdot ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$
  (tous les couples dans les deux sens)
- **transitive**: si
  $\forall x, y, z \in S \cdot ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$
  (si x se rend à z, alors (x, z) dans R)
- **asymétrique**: si $\forall x, y \in S \cdot ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R)$
  (aucun lien symétrique possible, même pas (x, x))

Types de relation II

Soit R une relation *homogène* sur S. Alors R est:

- **réflexive**: si $\forall x \in S \cdot ((x, x) \in R)$
  (tout x en lien avec lui-même)
- **symétrique**: si $\forall x, y \in S \cdot ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$
  (tous les couples dans les deux sens)
- **transitive**: si
  $\forall x, y, z \in S \cdot ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$
  (si x se rend à z, alors (x, z) dans R)
- **asymétrique**: si $\forall x, y \in S \cdot ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R)$
  (aucun lien symétrique possible, même pas (x, x))
- **anti-symétrique**: si
  $\forall x, y \in S \cdot ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y)$
  (seul lien symétrique possible est (x, x))

Autres notations

- Inverse d'une relation R^{-1}
  $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$
- Domaine d'une relation:
  $dom(R) = \{x \mid \exists y \cdot ((x, y) \in R)\}$
  (les x avec une flèche sortante)
- Co-domaine d'une relation:
  $ran(R) = \{y \mid \exists x \cdot ((x, y) \in R)\}$
  (les y avec une flèche entrante)
- Pour encore plus (!) de notations, voir Chapitre 2 des notes de cours.

Fonctions

Une **fonction** f de S à T est une relation

$$f \subseteq S \times T$$

telle que chaque élément de S "pointe" sur 0 ou 1 élément de T. Formellement, f est une fonction si

$$\forall x \cdot ((x, y) \in f \land (x, z) \in f \Rightarrow y = z)$$

Si $(x, y) \in f$, on écrit parfois $f(x) = y$.

Fonctions totales et partielles

Une fonction f de S vers T est **totale** si chaque $x \in S$ pointe vers un $y \in T$ (donc, pas 0).

- f est totale si $\forall x \in S \cdot \exists y \in T \cdot ((x, y) \in f)$

Fonctions totales et partielles

Une fonction f de S vers T est **totale** si chaque $x \in S$ pointe vers un $y \in T$ (donc, pas 0).

- f est totale si $\forall x \in S \cdot \exists y \in T \cdot ((x, y) \in f)$
- Si f n'est pas totale, alors elle est **partielle**.

Fonctions totales et partielles

Une fonction f de S vers T est **totale** si chaque $x \in S$ pointe vers un $y \in T$ (donc, pas 0).

- f est totale si $\forall x \in S \cdot \exists y \in T \cdot ((x, y) \in f)$
- Si f n'est pas totale, alors elle est **partielle**.
- Si ce n'est pas spécifié, f est totale *par défaut* (si elle est partielle, il faut le spécifier).

Types de fonctions

Une fonction f de S vers T est:

- **injective**: si chaque $x \in S$ pointe sur un $y \in T$ *différent*.
  $\forall x_1 \in S \cdot \forall x_2 \in S \cdot ((x_1, y) \in f \land (x_2, z) \in f \land x_1 \neq x_2 \Rightarrow y \neq z)$
  ou encore
  $\forall x \in S, y \in S \cdot ((x, z) \in f \land (y, z) \in R \Rightarrow x = y)$

Types de fonctions

Une fonction f de S vers T est:

- **injective**: si chaque $x \in S$ pointe sur un $y \in T$ *différent*.
  $\forall x_1 \in S \cdot \forall x_2 \in S \cdot ((x_1, y) \in f \wedge (x_2, z) \in f \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow y \neq z)$
  ou encore
  $\forall x \in S, y \in S \cdot ((x, z) \in f \wedge (y, z) \in R \Rightarrow x = y)$
- **surjective**: si chaque $y \in T$ est "pointé".
  $\forall y \in T \cdot \exists x \in S \cdot ((x, y) \in f)$

Types de fonctions

Une fonction f de S vers T est:

- **injective**: si chaque $x \in S$ pointe sur un $y \in T$ *différent*.
  $\forall x_1 \in S \cdot \forall x_2 \in S \cdot ((x_1, y) \in f \wedge (x_2, z) \in f \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow y \neq z)$
  ou encore
  $\forall x \in S, y \in S \cdot ((x, z) \in f \wedge (y, z) \in R \Rightarrow x = y)$
- **surjective**: si chaque $y \in T$ est "pointé".
  $\forall y \in T \cdot \exists x \in S \cdot ((x, y) \in f)$
- **bijective**: si f est à la fois injective et surjective.

Types de fonctions

Une fonction f de S vers T est:

- **injective**: si chaque $x \in S$ pointe sur un $y \in T$ *différent*.
  $\forall x_1 \in S \cdot \forall x_2 \in S \cdot ((x_1, y) \in f \wedge (x_2, z) \in f \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow y \neq z)$
  ou encore
  $\forall x \in S, y \in S \cdot ((x, z) \in f \wedge (y, z) \in R \Rightarrow x = y)$
- **surjective**: si chaque $y \in T$ est "pointé".
  $\forall y \in T \cdot \exists x \in S \cdot ((x, y) \in f)$
- **bijective**: si f est à la fois injective et surjective.
- *Note:* ces définitions s'appliquent aux fonctions partielles et totales.

Cardinalité

- **Définition.** Soit S et T deux ensembles. Alors $|S| = |T|$ si et seulement si il existe une fonction bijective (totale) de S vers T.

Cardinalité

- **Définition.** Soit S et T deux ensembles. Alors $|S| = |T|$ si et seulement si il existe une fonction bijective (totale) de S vers T.
- S'applique aux ensembles infinis.

Cardinalité

- **Définition.** Soit S et T deux ensembles. Alors $|S| = |T|$ si et seulement si il existe une fonction bijective (totale) de S vers T.
- S'applique aux ensembles infinis.
- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$, car voici une bijection f de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est impair} \\ -(n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Notations des fonctions

Description	Expression	Syntaxe ASCII B	Définition
fonctions	$S \nrightarrow T$	S `+->` T	$\{f \mid f \in S \leftrightarrow T \wedge f^{-1} ; f \subseteq \mathsf{id}(T)\}$
fonctions totales	$S \rightarrow T$	S `-->` T	$\{f \mid f \in S \nrightarrow T \wedge \mathsf{dom}(f) = S\}$
injections	$S \rightarrowtail\!\!\!\!\!+ T$	S `>+>` T	$\{f \mid f \in S \nrightarrow T \wedge f^{-1} \in T \nrightarrow S\}$
injections totales	$S \rightarrowtail T$	S `>->` T	$\{f \mid f \in S \rightarrowtail\!\!\!\!\!+ T \wedge \mathsf{dom}(f) = S\}$
surjections	$S \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!+ T$	S `+->>` T	$\{f \mid f \in S \nrightarrow T \wedge \mathsf{ran}(f) = T\}$
surjections totales	$S \twoheadrightarrow T$	S `-->>` T	$\{f \mid f \in S \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!+ T \wedge \mathsf{dom}(f) = S\}$
bijections	$S \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!+ T$	S `>+>>` T	$\{f \mid f \in S \rightarrowtail\!\!\!\!\!+ T \wedge f \in S \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!+ T\}$
bijections totales	$S \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow T$	S `>->>` T	$\{f \mid f \in S \rightarrowtail T \wedge f \in S \twoheadrightarrow T\}$
lambda expression	$\lambda x.(\mathcal{A} \mid t)$	$\%x.(\mathcal{A} \mid t)$	$\{x \mapsto t \mid \mathcal{A}\}$

Figure: Symbolisme pour tous les types de fonctions